
BÖLÜM 1

TEMELLER

1	Vektör Uzayları	2
2	Taban ve Boyut	6
3	Lineer Dönüşümler	9
4	Bölüm Uzayları ve İzomorfizma Teoremleri	13
5	Dik Çarpım ve Dik Toplamlar . .	14

Bu ilk bölümde, lisans derslerinde verilen bilgilerin bazılarını hızlıca gözden geçirdiğimiz, temel kavram ve sonuçların tartışılacağı bir çerçeveye sunacağız. Genel olarak teorem kanıtları ve örneklerin kısıtlı tutulacağı bu bölümde, sonraki bölümler için gerekli olan bazı kavram ve sonuçları hatırlatmakla yetineceğiz.

1 Vektör Uzayları

Vektör kavramı ve vektör uzayları, doğrusal cebirin temel yapı taşlarıdır. Vektörler, özellikle Fizik alanı ile ilişkili konularda (örn. mekanik, dinamik vb.) bir yön ve büyüklük taşıyan temsiller olarak düşünülse de doğrusal cebir bağlamında soyut bir kavram olarak ele alınır. Bu sayede vektörler, hemen hemen bütün bilim alanlarında, geometrik olarak temsil edilmesi gerekmeden de kullanışlı araçlar olarak iş görürler.

Vektör uzayları ise, vektörlerin bazı temel özellikleri sağlayan topluluğudur. Bu temel özelliklerden biri de bir *skalerle çarpma* işleminin tanımlı olmasıdır. Yani bir vektör ile skaler adı verilen bir büyüklüğün işleme girmesi sonucunda yine bir vektör elde edilebilmelidir. Skaler büyüklükler uygulamada genellikle reel sayılar veya karmaşık sayılar olarak düşünülse de çok daha genel bir çerçevede tanımlanabilirler. Örneğin, bir vektör uzayını tanımlamak için skalerleri herhangi bir cisimden seçebiliriz. Bir cisim, üzerinde iki işlemin tanımlı olduğu ve bu işlemlerin belirli özellikleri sağladığı bir kümedir.

Tanım 1.1: Cisim Kavramı

\mathbb{F} , boş olmayan bir küme ve \mathbb{F} üzerinde $+$ (toplama) ve \cdot (çarpma) şeklinde iki işlem tanımlı olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa $(\mathbb{F}, +, \cdot)$ sistemine bir cisim denir:

1. $(\mathbb{F}, +)$ –birim elemanını 0 ile göstereceğimiz– bir değişmeli gruptur.
2. $(\mathbb{F} \setminus \{0\}, \cdot)$ –birim elemanını 1 ile göstereceğimiz– bir değişmeli gruptur.
3. Çarpma işleminin toplama işlemi üzerine dağılma özelliği vardır:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

Yukarıdaki tanımda, kullanılan grup kavramı, üzerinde bir işlemin tanımlı olduğu bir kümenin belirli özellikleri sağladığı bir yapıyı tarif eder. Buna göre bir grup, üzerindeki işlemin birleşmeli olduğu, birim elemanının bulunduğu ve her elemanının tersinin olduğu bir kümedir. Değişmeli grup ise, işlemin değişmeli olduğu bir grup olarak tanımlanır. Dolayısıyla \mathbb{F} bir cisim ise, \mathbb{F} üzerinde tanımlı $+$ işlemi birleşmeli, birim elemanı 0 olan ve her elemanın toplamsal tersinin bulunduğu bir kümedir ve toplama işlemi değişmelidir. Ek olarak eğer $x \in \mathbb{F}$ ise x 'in toplamsal tersi $-x$ ile gösterilir. Buna göre her $x \in \mathbb{F}$ için

$$x + 0 = x,$$

$$x + (-x) = 0,$$

$$x + y = 0 \implies y = -x \text{ ve } x = -y$$

olur. Ayrıca \mathbb{F} üzerinde tanımlı \cdot işlemi de değişmeli, birleşmeli, birim elemanı 1 olan ve sıfırdan

farklı her elemanın çarpımsal tersinin bulunduğu bir kümedir. Yani \mathbb{F} cismi için $x \in \mathbb{F}$ ve $x \neq 0$ ise x^{-1} ile gösterilen x 'in çarpımsal tersi vardır ve bu ters eleman tek türlü belirlidir. Buna göre her $x \in \mathbb{F}$ için

$$\begin{aligned}x \cdot 1 &= x, \\x \cdot x^{-1} &= 1, \\x \cdot y = 1 &\implies y = x^{-1} \text{ ve } x = y^{-1}\end{aligned}$$

olur.

Bir \mathbb{F} cismi üzerinde *çıkarma işlemi* olarak bilinen ve $-$ ile gösterilen işlem ise her $a, b \in \mathbb{F}$ için

$$a - b = a + (-b)$$

şeklinde tanımlanır. Buna göre çıkarma işlemi, toplama işleminin özel bir durumu olarak düşünülebilir. Toplama işleminin aksine çıkarma işlemi, genellikle değişmeli ve birleşmeli değildir.

Bir \mathbb{F} cisminde elemanların çarpımı, genellikle, elemanların yan yana yazılması ile ifade edilir; yani $x \cdot y$ yerine xy yazılır. Biz her iki yazımı da serbestçe kullanacağız. Ayrıca \mathbb{F} cismi için $x \in \mathbb{F}$ ve $x \neq 0$ ise x^{-1} ile gösterilen x 'in çarpımsal tersi $1/x$ ile de gösterilebilir.

Cisimler pek çok farklı bağlamda karşımıza çıkabilirler. Örneğin rasyonel sayılar \mathbb{Q} , reel sayılar \mathbb{R} , karmaşık sayılar \mathbb{C} , sonlu cisimler \mathbb{F}_{p^n} ve rasyonel fonksiyonlar cismi gibi cisimlerin kendine has uygulama sahaları mevcuttur. Doğrusal cebir, bu uygulama sahalarının çoğunda cisimlerin özelliklerini kullanarak soyut bir çerçeveye sunar. Şimdi bir vektör uzayının nasıl tanımlandığını görelim:

Tanım 1.2: Vektör Uzayı

\mathbb{F} bir cisim ve \mathcal{V} boş olmayan bir küme olsun. Sırasıyla toplama ve skalerle çarpma denilen aşağıdaki gibi işlemler tanımlı olsun.

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} & \text{ve} & \mathbb{F} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V} \\(x, y) \mapsto x + y & & (a, x) \mapsto a \cdot x\end{array}$$

Bu işlemler aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa $(\mathcal{V}, +, \cdot)$ sistemine \mathbb{F} üzerinde bir *vektör uzayı* veya kısaca bir \mathbb{F} -uzayı denir:

1. $(\mathcal{V}, +)$ –birim elemanını $\mathbf{0}$ ile göstereceğimiz– bir değişmeli gruptur.
2. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}, \forall a, b \in \mathbb{F}, a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \cdot \mathbf{x} + a \cdot \mathbf{y}$.
3. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \forall a, b \in \mathbb{F}, (a + b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{x}$.
4. $\forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \forall a, b \in \mathbb{F}, (ab) \cdot \mathbf{x} = a \cdot (b \cdot \mathbf{x})$.

$$5. \forall \mathbf{x} \in \mathcal{V}, 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}.$$

Yukarıdaki tanımdan da görüldüğü gibi bir vektör uzayı, skalerlerin etki ettiği bir toplamsal değişmeli gruptur. Bir vektör uzayının elemanlarına genel olarak *vektör* denir. Vektör uzayları söz konusu olduğunda, iki türlü büyüklük söz konusudur: skaler büyüklük ve vektörel büyüklük. Bir vektörü temsil ederken skalerlerden ayırmak için genellikle vektörleri kalın harflerle göstereceğiz. \mathcal{V} bir vektör uzayı ve $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ ise \mathbf{x} 'in toplamsal tersi $-\mathbf{x}$ ile gösterilir. Tanım gereği elde edilen özellikleri aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

- Her $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ için $0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$.
- Her a skaleri için $a \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$.
- Her a skaleri ve $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ için $a \cdot (-\mathbf{x}) = (-a) \cdot \mathbf{x} = -(a \cdot \mathbf{x})$.
- Her n tamsayısı, a skaleri ve $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ için $(n \cdot a) \cdot \mathbf{x} = a \cdot (n \cdot \mathbf{x}) = n \cdot (a \cdot \mathbf{x})$.

Bir \mathbb{F} cismi için

$$\mathbb{F}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid \text{her } 1 \leq i \leq n \text{ için } x_i \in \mathbb{F}\}$$

kartezyen çarpım kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemlerini her $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n), \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{F}^n$ ve her $a \in \mathbb{F}$ için

$$\begin{aligned} \mathbf{x} + \mathbf{y} &= (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n), \\ a \cdot \mathbf{x} &= (ax_1, \dots, ax_n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlarsak, \mathbb{F}^n bir \mathbb{F} -uzayı olur. \mathbb{F}^n uzayı, sonlu boyutlu \mathbb{F} -uzaylarının tipik bir örneğidir ve pek çok uygulama için kullanışlı bir çatı yapı sunar. Örneğin $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ için, \mathbb{F}^2 , 2-boyutlu Öklid uzayıdır ve önemli geometrik yapıları içinde barındırır. Bunlardan biri orijiden geçen doğrular olarak verilebilir. Mesela, $\mathcal{D} = \{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ kümesi, $y = x$ eşitliği ile temsil edilen birinci açıortay doğrusu olarak bilinen doğrudur. Dikkat edilirse \mathcal{D} , \mathbb{R}^2 uzayının bir alt kümesidir ve \mathbb{R}^2 üzerinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile \mathcal{D} de bir \mathbb{R} -uzayı olur. Bu tür alt kümelere *alt uzay* denir.

Tanım 1.3: Alt Uzay

\mathcal{V} bir \mathbb{F} -uzayı ve $\emptyset \neq \mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ olsun. Eğer \mathcal{W} , \mathcal{V} 'nin işlemlerine göre bir \mathbb{F} -uzayı oluyorsa \mathcal{W} kümesine \mathcal{V} 'nin bir *alt uzayı* denir.

Her vektör uzayı kendisinin bir alt uzayıdır. Bir vektör uzayının kendisinden başka bir alt uzayına *öz alt uzay* denir. Ayrıca $\{\mathbf{0}\}$ kümesi her vektör uzayı için bir alt uzayıdır. Bu alt uzaya *sıfır (alt)*

uzayı denir ve çoğu zaman kısaca $\mathbf{0}$ ile gösterilir. Aşağıdaki sonuç alt uzayları belirlemek için kullanışlıdır:

Teorem 1.4: Alt uzay kriteri

\mathcal{V} bir \mathbb{F} -uzayı ve $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ olsun. Eğer

(i) $\mathcal{W} \neq \emptyset$,

(ii) $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}, \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathcal{W}$, ve

(iii) $\forall a \in \mathbb{F}, \mathbf{x} \in \mathcal{W}, a \cdot \mathbf{x} \in \mathcal{W}$

ise \mathcal{W} , \mathcal{V} 'nin bir alt uzayıdır

Yukarıdaki kriteri kullanarak, alt uzayların keyfi kesişimlerinin de bir alt uzay olduğunu kolayca gösterebiliriz. Buna göre belirli elemanları içeren minimal bir alt uzay bulmak için bu elemanları içeren alt uzayların kesişimini alabiliriz. Örneğin, \mathcal{V} uzayının $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ alt kümesini içeren tüm alt uzaylarının kesişimi, X kümesini içeren en küçük alt uzayı verir. Bu alt uzaya \mathcal{V} 'nin X ile gerilen (veya üretilen) alt uzayı denir ve genellikle $\text{span}X$ veya $\langle X \rangle$ ile gösterilir.

Önerme 1.5

\mathcal{V} bir \mathbb{F} -uzayı ve $X \subseteq \mathcal{V}$ olsun. O zaman

$$\text{span}X = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i \mid n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{F}, \mathbf{x}_i \in X \right\}$$

olur.

\mathcal{V} bir vektör uzayı ve \mathcal{W} ile \mathcal{W}' , \mathcal{V} 'nin iki alt uzayı olsun. Bu durumda

$$\mathcal{W} + \mathcal{W}' := \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{W}, \mathbf{y} \in \mathcal{W}'\}$$

kümesi \mathcal{V} 'nin bir alt uzayıdır. Bu alt uzaya \mathcal{W} ile \mathcal{W}' uzaylarının *toplamı* denir. Tümevarım ile iki alt uzayın toplamını, sonlu tane alt uzayın toplamına genişletebiliriz: Örneğin $\mathcal{W}_1, \dots, \mathcal{W}_k$ alt uzayları için

$$\sum_{i=1}^k \mathcal{W}_i := \{\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_i \in \mathcal{W}_i \text{ için } 1 \leq i \leq k\} \quad (1.1)$$

toplamını tanımlayabiliriz. Daha da genel olarak, bir I indeks kümesi ve $\{\mathcal{W}_i\}_{i \in I}$ alt uzaylar ailesi için

$$\sum_{i \in I} \mathcal{W}_i := \left\{ \sum_{j \in J} \mathbf{x}_j \mid J \subseteq I \text{ sonlu ve her } j \in J \text{ için } \mathbf{x}_j \in \mathcal{W}_j \right\} \quad (1.2)$$

toplamını tanımlayabiliriz. Dikkat edilirse, bu tanım, sonlu sayıda alt uzayın toplamı için verdiğimiz tanımın bir genelleştirmesidir. Daha açık ifade etmek gerekirse, eğer $I = \{1, \dots, k\}$ ise, o zaman (1.1) ile (1.2) aynı anlama gelir.

2 Taban ve Boyut

\mathcal{V} bir vektör uzayı ve $X \subseteq \mathcal{V}$ olsun. Eğer $\mathcal{V} = \text{span}X$ ise, yani X kümesi \mathcal{V} uzayını gererse, X kümesine \mathcal{V} 'nin bir *üreteç kümesi* denir. Bu durumda, \mathcal{V} 'nin her \mathbf{x} elemanı için $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{x}_i$ olacak şekilde $a_i \in \mathbb{F}$ ve $\mathbf{x}_i \in X$ ($1 \leq i \leq n$) elemanları bulunabilir.

Tanım 2.1: Taban

\mathcal{V} bir \mathbb{F} -uzayı ve $X \subseteq \mathcal{V}$ olsun. Eğer X kümesi \mathcal{V} 'nin bir üreteç kümesi olduğu halde X 'in hiçbir öz alt kümesi \mathcal{V} 'yi geremiyorsa, X kümesine \mathcal{V} 'nin bir *tabanı* denir.

Yukarıdaki tanım gereği, bir taban, vektör uzayını geren minimal bir üreteç kümesidir. X , \mathcal{V} uzayının bir tabanı olduğunda X kümesinin elemanları \mathcal{V} uzayının *lineer bağımsız* elemanları olur. Yani X kümesinin her $\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ sonlu alt kümesi için

$$a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$$

eşitliğinin sağlanması için $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}$ katsayılarının hepsinin sıfır olması gerekir. Aksi halde en az bir a_i katsayısı sıfırdan farklı ise –örneğin $a_1 \neq 0$ ise–

$$\mathbf{x}_1 = \frac{1}{a_1} (-a_2 \mathbf{x}_2 - \dots - a_n \mathbf{x}_n)$$

olacağından $\mathbf{x}_1 \in \text{span}\{\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n\}$ ve böylece $X \setminus \{\mathbf{x}_1\}$ kümesi \mathcal{V} uzayının bir üreteç kümesi olur. Bu ise X kümesinin minimal olma özelliği ile çelişir.

Bir vektör uzayının lineer bağımsız elemanlarından oluşan bir alt kümesine o vektör uzayının bir *lineer bağımsız alt kümesi* denir. Aşağıdakiler bir $X = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$ kümesinin lineer bağımsız olması ile eşdeğerdir:

- (i) $a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n = b_1 \mathbf{x}_1 + \dots + b_n \mathbf{x}_n$ ise her $1 \leq i \leq n$ için $a_i = b_i$ dir.
- (ii) $a_1 \mathbf{x}_1 + \dots + a_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}$ ise her $1 \leq i \leq n$ için $a_i = 0$ dır.
- (iii) $\mathbf{x}_1 \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{x}_2 \notin \text{span}\{\mathbf{x}_1\}$, $\mathbf{x}_3 \notin \text{span}\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2\}$, \dots , $\mathbf{x}_n \notin \text{span}\{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_{n-1}\}$.

\mathcal{V} bir vektör uzayı ve $Y \subseteq \mathcal{V}$ olsun. Eğer

- (1) Y kümesi \mathcal{V} 'nin lineer bağımsız bir alt kümesi,

(2) \mathcal{V} 'nin Y kümesini içeren Y 'den farklı her alt kümesi lineer bağımlı ise,

Y kümesine \mathcal{V} 'nin bir *maksimal lineer bağımsız alt kümesi* denir. Aşağıdaki teorem bir vektör uzayının maksimal lineer bağımsız alt kümelerinin taban olduğunu göstermektedir:

Teorem 2.2

\mathcal{V} bir vektör uzayı ve $X \subseteq \mathcal{V}$ olsun. Aşağıdakiler denktir:

- (i) X kümesi \mathcal{V} 'nin bir maximal lineer bağımsız alt kümesidir.
- (ii) X kümesi \mathcal{V} 'nin bir minimal üreteç kümesidir.

Lineer bağımsız alt kümelerin bir artan zincirinin birleşimi de yine lineer bağımsız bir alt küme verir. Bu nedenle, Zorn Lemması ile, her vektör uzayının bir tabana sahip olacağı görülebilir.

Teorem 2.3

\mathcal{V} bir vektör uzayı olsun. O zaman \mathcal{V} 'nin en az bir tabanı vardır. Ayrıca \mathcal{V} 'nin her tabanının kardinalitesi aynıdır. Yani \mathcal{V} 'nin herhangi iki tabanı arasında bir birebir eşleme vardır.

Vektör uzayı tabanlarının yukarıdaki teorem ile verilen değişmezlik özelliği boyut kavramını doğurur.

Tanım 2.4: Boyut

\mathcal{V} bir \mathbb{F} -uzayı ve $X \subseteq \mathcal{V}$ olsun. Eğer X kümesi \mathcal{V} 'nin bir tabanı ise, X kümesinin eleman sayısına \mathcal{V} 'nin *boyutu* denir ve $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{V}$ ile gösterilir.

Eğer $|X| = n < \infty$ ise, \mathcal{V} 'ye bir n -boyutlu vektör uzayı denir. Eğer $|X| = \infty$ ise, \mathcal{V} 'ye sonsuz boyutlu vektör uzayı denir.

\mathbb{F} bir cisim ve $n \geq 1$ bir tamsayı olsun. O zaman \mathbb{F}^n uzayının boyutu n 'dir. \mathbf{e}_i , i -yinci konumunda 1, diğer konumlarında 0 olan vektörü temsil etsin. Buna göre $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ kümesi \mathbb{F}^n uzayının bir tabanıdır. Bu tabana \mathbb{F}^n uzayının *standart tabanı* denir.

Aşağıdaki kullanışlı teorem, Teorem 2.2'nin doğal bir sonucudur:

Teorem 2.5

\mathcal{V} bir vektör uzayı olsun.

- (1) \mathcal{V} 'nin her lineer bağımsız alt kümesi bir tabana genişletilebilir: $X \subseteq \mathcal{V}$ lineer bağımsız bir alt kümesi ise, \mathcal{V} 'nin X kümesini içeren bir tabanı vardır.

(2) \mathcal{V} 'nin her üreteç kümesi bir tabana daraltılabilir: $Y \subseteq \mathcal{V}$ bir üreteç kümesi ise, \mathcal{V} 'nin Y kümesi içinde kalan bir tabanı vardır.

\mathcal{V} , n -boyutlu bir \mathbb{F} -uzayı ve $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, \mathcal{V} 'nin bir tabanı olsun. $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ ise

$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{b}_1 + \dots + x_n \mathbf{b}_n \quad (1.3)$$

olacak şekilde $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}$ skalerleri bulunabilir. $\{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$ kümesi lineer bağımsız olduğundan (1.3) eşitliğindeki x_1, \dots, x_n skalerleri tek türlü belirlidir. Bu tek türlü belirli x_1, \dots, x_n skalerleri, \mathbf{x} 'in \mathcal{B} tabanına göre *koordinatları* olarak adlandırılır ve

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

şeklinde bir *koordinat matrisi* ile gösterilir.

\mathcal{V} 'nin başka bir tabanı $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_n\}$ olsun. O zaman \mathbf{x} 'in \mathcal{C} tabanına göre koordinatları

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

biçiminde bir sütun matrisidir. Burada akla gelebilecek bir soru $[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ ve $[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$ koordinat matrisleri arasında nasıl bir ilişki olduğudur. Bu ilişkiyi bulmak için \mathbf{c}_i 'lerin \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarını bulabiliriz:

$$\mathbf{c}_i = c_{1i} \mathbf{b}_1 + \dots + c_{ni} \mathbf{b}_n,$$

yani

$$[\mathbf{c}_i]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} c_{1i} \\ \vdots \\ c_{ni} \end{pmatrix}$$

olsun. Buna göre

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{c}_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ji} y_i \mathbf{b}_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n c_{ji} y_i \right) \mathbf{b}_j$$

eşitlikleri yazılabilir. \mathbf{x} 'in \mathcal{B} tabanına göre koordinatlarının tek türlü oluşu sayesinde her $1 \leq j \leq n$ için

$$x_j = \sum_{i=1}^n c_{ji} y_i = (c_{j1} \dots c_{jn}) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

olur. Dolayısıyla $P = [c_{ij}]$ denirse

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}} = P[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik sayesinde \mathcal{B} ve \mathcal{C} tabanlarına göre olan koordinatlar arasında geçiş yapabiliriz. Bu nedenle, yukarıdaki gibi elde edilen P matrisine, \mathcal{C} tabanından \mathcal{B} tabanına *geçiş matrisi* denir. P geçiş matrisi tersinirdir –yani $P \cdot P^{-1} = P^{-1} \cdot P = \mathbb{I}_n$ olacak şekilde bir (ve yalnız bir tek) P^{-1} kare matrisi vardır– ve P^{-1} matrisi de bir geçiş matrisidir: \mathcal{B} tabanına göre olan koordinatları \mathcal{C} tabanına göre olan koordinatlara dönüştürür. Başka bir deyişle,

$$[\mathbf{x}]_{\mathcal{C}} = P^{-1}[\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

eşitliği sağlanır.

3 Linear Dönüşümler

\mathcal{V} , n -boyutlu bir \mathbb{F} -uzayı ve $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, \mathcal{V} 'nin bir tabanı olsun.

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathbb{F}^n \\ \mathbf{x} &\mapsto [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}^t \end{aligned} \quad (1.4)$$

şeklinde tanımlanan ϕ fonksiyonunu ele alalım. (Burada t ile transpoz alma işlemi belirtilmiştir.) Dikkat edilirse, her $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}$ için

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= [\mathbf{x} + \mathbf{y}]_{\mathcal{B}}^t = [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}^t + [\mathbf{y}]_{\mathcal{B}}^t = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}), \\ \phi(a \cdot \mathbf{x}) &= [a \cdot \mathbf{x}]_{\mathcal{B}}^t = a \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}^t = a \cdot \phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

olur. Buna göre ϕ , \mathcal{V} uzayındaki vektörleri, cebirsel yapıyı koruyarak, \mathbb{F}^n uzayına taşıyan bir dönüşümdür. Böyle dönüşümlere *linear dönüşümler* denir.

Tanım 3.1: Linear Dönüşüm

\mathcal{V} ve \mathcal{W} iki \mathbb{F} -uzayı olsun. Eğer bir $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, ϕ 'ye bir *linear dönüşüm* denir:

1. $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{V}, \phi(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{y}),$
2. $\forall a \in \mathbb{F}, \mathbf{x} \in \mathcal{V}, \phi(a \cdot \mathbf{x}) = a \cdot \phi(\mathbf{x})$

Eğer bir $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ linear dönüşümü birebir ise ϕ 'ye *gömme dönüşümü* denir. Eğer ϕ hem birebir hem de örten ise ϕ 'ye bir *izomorfizma* denir.

Dikkat edilirse, (1.4)'deki ϕ fonksiyonu, bir izomorfizmadır. Buna göre her n -boyutlu \mathbb{F} -uzayı, \mathbb{F}^n uzayına izomorftur.

\mathcal{V} ve \mathcal{W} gibi iki \mathbb{F} -uzayı için \mathcal{V} uzayından \mathcal{W} uzayına tanımlı tüm lineer dönüşümlerin kümesini $\mathcal{L}_{\mathbb{F}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ –veya \mathbb{F} cismi ile ilgili bir karmaşa bulunmuyorsa $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ – ile göstereceğiz. Özel olarak, $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ olduğunda, $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{V})$ yerine $\mathcal{L}(\mathcal{V})$ gösterimini kullanacağız.

Her $a \in \mathbb{F}$ ve $\phi, \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ için

$$\begin{aligned} \phi + \psi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{W} & \text{ve} & & a \cdot \phi : \mathcal{V} &\rightarrow \mathcal{W} \\ \mathbf{x} &\mapsto \phi(\mathbf{x}) + \psi(\mathbf{x}) & & & \mathbf{x} &\mapsto a \cdot \phi(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan işlemler ile $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, bir \mathbb{F} -uzayı olur. Bu uzaya *lineer dönüşümler uzayı* denir. $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ lineer dönüşümler uzayının sıfır elemanı,

$$\mathbf{0}_{\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}, \mathbf{x} \mapsto \mathbf{0}_{\mathcal{W}}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümdür.

\mathcal{V} ve \mathcal{W} , sırasıyla n ve m boyutlu \mathbb{F} -uzayları olsun. \mathcal{V} uzayının bir tabanı $\mathcal{B} = \{\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n\}$, \mathcal{W} uzayının bir tabanı da $\mathcal{C} = \{\mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_m\}$ olsun. O zaman $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineer dönüşümü için

$$[\phi(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = A \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$$

şeklinde bir A matrisi vardır. Burada A , sütunları $\phi(\mathbf{b}_1), \dots, \phi(\mathbf{b}_n)$ 'in \mathcal{C} tabanına göre koordinat matrisleridir. Yani

$$A = \left([\phi(\mathbf{b}_1)]_{\mathcal{C}} \quad \dots \quad [\phi(\mathbf{b}_n)]_{\mathcal{C}} \right)$$

şeklinde bir $m \times n$ matrisidir. Bu A matrisi ϕ 'nin $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ taban çiftine göre *matris temsili* olarak adlandırılır ve $\mathcal{M}_{\phi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ ile gösterilir.

- 1 $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineer dönüşümü, aynı zamanda, her $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ için $[\phi(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = \mathcal{M}_{\phi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ eşitliğini sağlar.
- 2 Eğer $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ ise her $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ için $[\phi(\mathbf{x})]_{\mathcal{C}} = A \cdot [\mathbf{x}]_{\mathcal{B}}$ olacak şekilde tanımlı bir $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineer dönüşümü vardır ve bu ϕ dönüşümünün matris temsili $\mathcal{M}_{\phi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = A$ olur.
- 3 Özel olarak her $\phi : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ lineer dönüşümü, bir $m \times n$ matrisi ile temsil edilebilir. Eğer her iki vektör uzayının da standart tabanları kullanılırsa, ϕ dönüşümünün matris temsili, \mathbb{F}^n 'nin i -inci standart taban vektörü \mathbf{e}_i için $\phi(\mathbf{e}_i)$ 'nin i -yinci sütuna yerleştirildiği $m \times n$ matristir.
- 4 Tersine, her $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ matrisine karşılık gelen bir $\phi : \mathbb{F}^n \rightarrow \mathbb{F}^m$ lineer dönüşümü vardır.
- 5 Kolayca görülebilir ki her $a \in \mathbb{F}$ ve $\phi, \psi \in \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ için

$$\mathcal{M}_{\phi+\psi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \mathcal{M}_{\phi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} + \mathcal{M}_{\psi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}, \quad \mathcal{M}_{a \cdot \phi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = a \cdot \mathcal{M}_{\phi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$$

eşitlikleri sağlanır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W}) &\rightarrow \mathbb{F}^{m \times n} \\ \phi &\mapsto \mathcal{M}_\phi^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}\end{aligned}$$

dönüşümü bir lineer dönüşümdür. Öte yandan Φ dönüşümünün birebir ve örten olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla Φ bir izomorfizmadır. Bu nedenle $\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ uzayı, $\mathbb{F}^{m \times n}$ matrisler uzayına izomorftur. Özel olarak $\dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{L}(\mathcal{V}, \mathcal{W})) = n \cdot m$ olur.

6 Eğer $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineer dönüşümü birebir ise, $\mathcal{M}_\phi^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ matrisinin sütunları lineer bağımsızdır. Buna göre $\mathcal{M}_\phi^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ matrisinin rankı n olur.

7 Eğer ϕ bir izomorfizma ise $n = m = \text{rank}(\mathcal{M}_\phi^{\mathcal{B}, \mathcal{C}})$ ve böylece $\mathcal{M}_\phi^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ matrisi tersinirdir. Ayrıca, bu durumda,

$$\left(\mathcal{M}_\phi^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}\right)^{-1} = \mathcal{M}_{\phi^{-1}}^{\mathcal{C}, \mathcal{B}}$$

olur.

8 Eğer $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineer dönüşümü $(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ taban çiftine göre $\mathcal{M}_\phi^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}$ matrisine sahipse, ϕ 'nin $(\mathcal{B}', \mathcal{C}')$ taban çiftine göre matris temsili

$$\mathcal{M}_\phi^{\mathcal{B}', \mathcal{C}'} = P \cdot \mathcal{M}_\phi^{\mathcal{B}, \mathcal{C}} \cdot Q$$

eşitliğini sağlar. Burada P ve Q matrisleri, sırasıyla, \mathcal{C} tabanından \mathcal{C}' tabanına ve \mathcal{B}' tabanından \mathcal{B} tabanına geçiş matrisleridir.

Tanım 3.2: Çekirdek ve Görüntü

$\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ bir lineer dönüşüm olsun. \mathcal{V} 'nin

$$\ker(\phi) := \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} \mid \phi(\mathbf{x}) = \mathbf{0}_{\mathcal{W}}\}$$

alt kümesine ϕ 'nin çekirdeği denir.

ϕ 'nin görüntüsü ise \mathcal{W} uzayının

$$\text{Im}(\phi) = \{\phi(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}$$

alt kümesidir.

Kolayca görülebilir ki $\ker(\phi)$, \mathcal{V} uzayının, $\text{Im}(\phi)$ ise \mathcal{W} uzayının bir alt uzayıdır.

Teorem 3.3: Çekirdek ve Görüntü Boyutları Arasındaki İlişki

$\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ bir lineer dönüşüm ve $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{V} = n$ olsun. O zaman

$$\dim_{\mathbb{F}} \ker(\phi) + \dim_{\mathbb{F}} \text{Im}(\phi) = n$$

eşitliği sağlanır.

Önerme 3.4

Bir $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ lineer dönüşümü birebirdir ancak ve ancak $\ker(\phi) = \{\mathbf{0}\}$ dir.

Bir matris ile lineer dönüşüm, bir lineer dönüşüm ile de bir matris tanımlanabileceğinden bahsetmiştik. Bu nedenle lineer dönüşümler ile matrislerin teorisi birbirine paralel bir yapıdadır. Bunu ilk olarak lineer dönüşümler için tanımladığımız çekirdek ve görüntü kavramlarının matrisler üzerine nasıl aktarıldığını göstererek inceleyelim.

$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ olsun. O zaman A matrisi ile tanımlı bir lineer dönüşüm

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{F}^n &\rightarrow \mathbb{F}^m \\ \mathbf{x} &\mapsto A\mathbf{x} \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. A matrisinin çekirdeği, bu ϕ dönüşümünün çekirdeği olarak tanımlanır:

$$\ker(A) := \ker(\phi) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{F}^n \mid A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$$

Dolayısıyla $\ker(A)$, \mathbb{F}^n 'nin bir alt uzayıdır. Bu alt uzaya bazı kaynaklarda A matrisinin *sıfır uzayı* (*null space*) denir. $\dim_{\mathbb{F}}(\ker(A))$ ise A matrisinin sıfırlığı (*nullity*) olarak adlandırılır ve $\text{Null}(A)$ ile gösterilir.

Benzer şekilde, A matrisinin görüntüsü, bu ϕ dönüşümünün görüntüsü olarak tanımlanır:

$$\text{Im}(A) := \text{Im}(\phi) = \{A\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{F}^n\}$$

Dolayısıyla $\text{Im}(A)$, \mathbb{F}^m 'nin bir alt uzayıdır. Dikkat edilirse bu alt uzay A matrisinin sütunlarının \mathbb{F}^m içinde gerdiği alt uzayıdır. O nedenle $\text{Im}(A)$ uzayına aynı zamanda A 'nın *sütun uzayı* da denmektedir. $\dim_{\mathbb{F}}(\text{Im}(A))$ boyutuna A matrisinin *rankı* denir. Buna göre Teorem 3.3 gereğince $\text{rank}(A) + \text{Null}(A) = n$ eşitliği sağlanır.

Diğer taraftan, $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ bir lineer dönüşüm ve $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{V} = n$ ise o zaman \mathcal{V} ve \mathcal{W} uzaylarının, sırasıyla, \mathcal{B} ve \mathcal{C} gibi herhangi iki tabanı için $\ker(\phi)$ ve $\text{Im}(\phi)$ alt uzaylarının boyutları, $\dim_{\mathbb{F}} \ker(\phi) = n - \text{rank}(\mathcal{M}_{\phi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}})$ ve $\dim_{\mathbb{F}} \text{Im}(\phi) = \text{rank}(\mathcal{M}_{\phi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}})$ eşitlikleri ile hesaplanabilir. Özel olarak, $\text{Null}(\mathcal{M}_{\phi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}) + \text{rank}(\mathcal{M}_{\phi}^{\mathcal{B}, \mathcal{C}}) = n$ eşitliği sağlanır.

4 Bölüm Uzayları ve İzomorfizma Teoremleri

\mathcal{V} bir vektör uzayı ve $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{V}$ bir alt uzay olsun. \mathcal{W} , $(\mathcal{V}, +)$ toplamsal değişmeli grubunun bir alt grubu olduğundan \mathcal{V}/\mathcal{W} bölüm grubu tanımlıdır. Buna göre \mathcal{V}/\mathcal{W} , \mathcal{W} 'nin \mathcal{V} içindeki kosetlerinin kümesidir:

$$\mathcal{V}/\mathcal{W} = \{\mathbf{x} + \mathcal{W} \mid \mathbf{x} \in \mathcal{V}\}$$

Ayrıca her $\mathbf{x} + \mathcal{W}, \mathbf{y} + \mathcal{W} \in \mathcal{V}/\mathcal{W}$ için

$$\mathbf{x} + \mathcal{W} = \mathbf{y} + \mathcal{W} \iff \mathbf{x} - \mathbf{y} \in \mathcal{W}$$

ve

$$(\mathbf{x} + \mathcal{W}) + (\mathbf{y} + \mathcal{W}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathcal{W}$$

olur.

\mathcal{V}/\mathcal{W} kümesi üzerinde

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{F} \times \mathcal{V}/\mathcal{W} &\rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{W} \\ (c, \mathbf{x} + \mathcal{W}) &\mapsto c \cdot \mathbf{x} + \mathcal{W} \end{aligned}$$

şeklinde bir skalerle çarpma işlemi tanımlanırsa, \mathcal{V}/\mathcal{W} bir \mathbb{F} -uzayı olur.

Eğer \mathcal{V} bir sonlu boyutlu vektör uzayı ise, \mathcal{V}/\mathcal{W} bölüm uzayı da sonlu boyutludur ve $\dim_{\mathbb{F}} \mathcal{V}/\mathcal{W} \leq \dim_{\mathbb{F}} \mathcal{V}$ eşitsizliği sağlanır. Aslında $\mathcal{B}_{\mathcal{W}} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k\}$ kümesi \mathcal{W} alt uzayının bir tabanı ise Teorem 2.5 gereğince \mathcal{V} uzayının bir $\mathcal{B}_{\mathcal{V}} = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_k, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ tabanına genişletilebilir. Buna göre $\{\mathbf{v}_1 + \mathcal{W}, \dots, \mathbf{v}_m + \mathcal{W}\}$ kümesi \mathcal{V}/\mathcal{W} bölüm uzayının bir tabanıdır. Özel olarak,

$$\dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{V}) = k + m = \dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{W}) + \dim_{\mathbb{F}}(\mathcal{V}/\mathcal{W})$$

olduğu görülür.

\mathcal{V} bir vektör uzayı ve \mathcal{W} , \mathcal{V} 'nin bir alt uzayı olsun. O zaman

$$\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}/\mathcal{W},$$

her $\mathbf{x} \in \mathcal{V}$ için $\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathcal{W}$ şeklinde tanımlı örten bir lineer dönüşüm vardır. Bu dönüşümün çekirdeği \mathcal{W} alt uzayıdır. Özel olarak bu dönüşüme bir *doğal izdüşüm* denir.

Teorem 4.1: İzomorfizma Teoremleri

1. $\phi : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ bir lineer dönüşüm olsun. O zaman

$$\text{Im}(\phi) \cong \mathcal{V}/\ker(\phi)$$

dir.

2. \mathcal{V} bir vektör uzayı ve $\mathcal{W}, \mathcal{U}, \mathcal{V}$ 'nin alt uzayları olsun. Eğer $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{U}$ ise,

$$(\mathcal{V}/\mathcal{W})/(\mathcal{U}/\mathcal{W}) \cong \mathcal{V}/\mathcal{U}$$

olur.

5 Dik Çarpım ve Dik Toplamlar

\mathbb{F} bir cisim ve $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$, birer \mathbb{F} -uzayı olsun. $\mathcal{V}_1 \times \dots \times \mathcal{V}_k$ kümesi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemlerini

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) + (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k) &= (\mathbf{x}_1 + \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_k), \\ a \cdot (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k) &= (a \cdot \mathbf{x}_1, \dots, a \cdot \mathbf{x}_k) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayarak yeni bir \mathbb{F} -uzayı elde edebiliriz. Bu uzaya $\mathcal{V}_1, \dots, \mathcal{V}_k$ uzaylarının *dik çarpımı* denir. Zermelo-Freankel küme teorisi çerçevesinde, seçme aksiyomunu kabul ederek, dik çarpım uzaylarını keyfi sayıda \mathbb{F} -uzayı için de tanımlayabiliriz. Yani $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$, \mathbb{F} -uzaylarının bir ailesi ise

$$\prod_{i \in I} \mathcal{V}_i = \left\{ f : I \rightarrow \bigcup_{i \in I} \mathcal{V}_i \mid \text{her } i \in I \text{ için } f(i) \in \mathcal{V}_i \right\}$$

kümesi boştan farklıdır ve her $f, g \in \prod_{i \in I} \mathcal{V}_i$ ve $a \in \mathbb{F}$ için

$$(f + g)(i) = f(i) + g(i), \quad (a \cdot f)(i) = a \cdot f(i) \quad (1.5)$$

şeklinde tanımlı işlemlerle, $\prod_{i \in I} \mathcal{V}_i$ kümesi bir \mathbb{F} -uzayı olur. Bu uzaya $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$ ailesinin *dik çarpım uzayı* denir. Bu noktada, $\prod_{i \in I} \mathcal{V}_i$ kümesinin elemanları olarak I indeksi üzerinden tanımlanan fonksiyonları daha kullanışlı bir gösterim ile değiştirebiliriz: $f \in \prod_{i \in I} \mathcal{V}_i$ olmak üzere her $i \in I$ için $x_i = f(i) \in \mathcal{V}_i$ olarak tanımlarsak, f fonksiyonu yerine, onu tam olarak ifade eden $(x_i)_{i \in I}$ gösterimini de kullanabiliriz. $\prod_{i \in I} \mathcal{V}_i$ dik çarpım uzayının \mathbb{F} -uzayı yapısı bu gösterimlere göre yeniden tanımlanırsa her $(x_i)_{i \in I}, (y_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{V}_i$ ve $a \in \mathbb{F}$ için

$$(x_i)_{i \in I} + (y_i)_{i \in I} = (x_i + y_i)_{i \in I}, \quad a \cdot (x_i)_{i \in I} = (a \cdot x_i)_{i \in I}$$

eşitlikleri yazılabilir.

$\prod_{i \in I} \mathcal{V}_i$ uzayının *dik toplam uzayı* adı verilen çok özel bir alt uzayı vardır:

$$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{V}_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} \mathcal{V}_i \mid \text{en fazla sonlu tane } i \in I \text{ hariç her } i \text{ için } x_i = 0 \right\} \quad (1.6)$$

$\bigoplus_{i \in I} \mathcal{V}_i$ 'nin, $\prod_{i \in I} \mathcal{V}_i$ uzayının bir alt uzayı olduğunu görmek zor değildir.

Her $j \in I$ için

$$\mathcal{V}'_j = \bigoplus_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \mathcal{V}_i \quad (1.7)$$

alt uzayı tanımlansın. Bun göre

$$(a) \sum_{i \in I} \mathcal{V}'_i = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{V}_i,$$

$$(b) \text{ Her } j \in I \text{ için } \mathcal{V}_j \cap \mathcal{V}'_j = \{\mathbf{0}\}$$

olur. Bu özellikler, bir dik toplam uzayı için belirleyici niteliktedir. Daha açık söylemek gerekirse, eğer bir \mathcal{V} vektör uzayı için

$$(a') \mathcal{V} = \sum_{i \in I} \mathcal{V}_i \text{ ve}$$

$$(b') \text{ Her } j \in I \text{ için}$$

$$\mathcal{V}_j \cap \left(\sum_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \mathcal{V}_i \right) = \{\mathbf{0}\}$$

olacak şekilde \mathcal{V} 'nin bir $\{\mathcal{V}_i\}_{i \in I}$ alt uzay ailesi varsa o zaman \mathcal{V} uzayı bir dik toplam uzayına izomorf olur.

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{V} &\longrightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{V}_i \\ \sum_{\substack{i \in I \\ \text{sonlu}}} x_i &\longmapsto (x_i)_{i \in I} \end{aligned}$$

(a') koşulu ile ϕ , \mathcal{V} 'nin her elemanı için tanımlıdır. (b') koşulu ile de ϕ iyi tanımlı olur. (Nedenini araştırınız. ?) Öte yandan ϕ 'nin birebir oluşu, tümüyle, $\prod_{i \in I} \mathcal{V}_i$ uzayının elemanlarının yapısı ile ilgilidir. Son olarak, $\text{Im}(\phi) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{V}_i$ 'dir. Bu durumda \mathcal{V} 'yi $\text{Im}(\phi)$ ile özdeşleştirerek onu bir dik toplam uzayı olarak değerlendirebiliriz ve buna mukabil $\mathcal{V} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{V}_i$ yazabiliriz. Bu yazım bazı kaynaklarda bir *iç dik toplam* olarak anılır. Aynı kaynaklar (1.6) ile tanımlanan dik toplamı da *dış dik toplam* olarak adlandırır. Biz bu iki dik toplamı birbirinden ayırt etmeden her ikisini de sadece *dik toplam* şeklinde ifade edeceğiz.

\mathcal{V} bir vektör uzayı ve $\mathcal{V} = \sum_{i \in I} \mathcal{V}_i$ olsun. Her $i \in I$ için \mathcal{B}_i , \mathcal{V}_i alt uzayının bir tabanı olsun. O zaman $\mathcal{V} = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{V}_i$ ancak ve ancak

$$(i) \mathcal{B}_j \cap \left(\bigcup_{\substack{i \in I \\ i \neq j}} \mathcal{B}_i \right) = \emptyset \text{ ve}$$

(ii) $\bigcup_{i \in I} \mathcal{B}_i$ kümesi \mathcal{V} 'nin bir tabanıdır.

Özel olarak \mathcal{V} uzayının bir \mathcal{B} tabanı için $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2$ ve $\mathcal{B}_1 \cap \mathcal{B}_2 = \emptyset$ ise $\mathcal{V}_1 = \langle \mathcal{B}_1 \rangle$ ve $\mathcal{V}_2 = \langle \mathcal{B}_2 \rangle$ olmak üzere $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{V}_2$ olur.

Örnek :

Bir $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ kare matrisi için eğer $A^t = A$ (veya $A^t = -A$) ise A 'ya *simetrik matris* (veya *antisimetrik matris*) denir.

Dikkat edilirse, simetrik ve antisimetrik matrisler, $\mathbb{F}^{n \times n}$ uzayının birer alt uzayını oluşturur. $\text{Sym}_n(\mathbb{F})$ ile gösterilen simetrik matrisler uzayı için

$$\dim_{\mathbb{F}}(\text{Sym}_n(\mathbb{F})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

ve $\text{ASym}_n(\mathbb{F})$ ile gösterilen antisimetrik matrisler uzayı için

$$\dim_{\mathbb{F}}(\text{ASym}_n(\mathbb{F})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

eşitlikleri sağlanır. (Nedenini araştırınız. ?) Öte yandan her $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ için

$$A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t), \quad \frac{1}{2}(A + A^t) \in \text{Sym}_n(\mathbb{F}), \quad \frac{1}{2}(A - A^t) \in \text{ASym}_n(\mathbb{F})$$

olduğundan $\mathbb{F}^{n \times n} = \text{Sym}_n(\mathbb{F}) + \text{ASym}_n(\mathbb{F})$ eşitliğini yazabiliriz. Ayrıca $\text{Sym}_n(\mathbb{F}) \cap \text{ASym}_n(\mathbb{F}) = \{\mathbf{0}_{n \times n}\}$ olduğundan $\mathbb{F}^{n \times n} = \text{Sym}_n(\mathbb{F}) \oplus \text{ASym}_n(\mathbb{F})$ olur. ■

Yukarıdaki örneği genelleştirerek, her $A \in \mathbb{F}^{m \times n}$ matrisi için $A = \frac{1}{2}(A + A^t) + \frac{1}{2}(A - A^t)$