

---

---

# BÖLÜM 1

---

## TEMEL İDEAL BÖLGELERİ ÜZERİNDEKİ MODÜLLER

1	Temel İdeal Bölgeleri . . . . .	2
2	Mertebe Kavramı . . . . .	3
3	Devirli Modüller . . . . .	4
4	TİB Üzerindeki Serbest Modüller	7
5	Asıl (Primary) Devirli Ayrışım .	11
6	Değişmez Çarpanlar Ayrışımı (Invariant Factor Decomposition)	12
7	Devirli Modüllerin Karakteri- zasyonu . . . . .	13

Bu bölümde, temel ideal bölgeleri üzerindeki modüller incelenecektir. Temel ideal bölgeleri, üzerindeki modüllerin nispeten daha iyi huylu davrandığı halka sınıfıdır. Özel olarak bu halkalar birer Noether halkasıdır ve bu nedenle üzerindeki sonlu üretilmiş modüller de Noether modülleridir. Öte yandan serbest modüllerin alt modüllerinin de serbest olması özelliği bu halkalar üzerinde geçerlidir. Bu özellik vektör uzaylarının her alt uzayının da bir baza sahip olması özelliğine benzer. Öte yandan, sonlu üretilmiş modüllerin devirli modüllerin dik toplamı olarak yazılabilmesi özelliği de bu halkalar üzerinde geçerlidir. Bu sayede temel ideal bölgeleri üzerindeki sonlu üretilmiş modüllerin sınıflandırılmasında önemli rol oynayan bazı *değişmezler* ortaya konulacaktır.

# 1 Temel İdeal Bölgeleri

$R$  bir tamlık bölgesi olsun. Eğer  $R$ 'nin her idealinin bir tek üretici varsa  $R$ 'ye *temel ideal bölgesi* denir.  $a, b \in R$  olsun. Eğer  $\langle a \rangle = \langle b \rangle$  ise  $a$  ile  $b$  elemanlarına *muadil* elemanlar denir. Kolayca görülebilir ki  $a$  ile  $b$  muadildir ancak ve ancak  $a = ub$  olacak şekilde birimsel (yani tersinir)  $u \in R$  elemanı vardır.

$R$  bir temel ideal bölgesi (TİB) olsun. Buna göre aşağıdakiler sağlanır:

- ①  $R$ 'nin asal ve indirgenemez elemanları aynıdır.
- ②  $R$  bir tek türlü çarpanlama bölgesidir. Yani sıfırdan farklı birimsel olmayan her  $a \in R$  için

$$a = up_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$$

biçiminde yazılabilir. Burada  $u \in R$  birimsel,  $p_i$ 'ler birbirinden farklı asal (veya indirgenemez) elemanlar ve  $k_i$ 'ler pozitif tam sayılardır ve bu çarpanlama  $p_i$ 'lerin sıralanması ve muadil olma farkı ile tektir.

- ③ Her sonlu üretilmiş  $R$ -modül bir Noether modülüdür.

$R$  bir temel ideal bölgesi ve  $a, b \in R$  olsun. Eğer  $a$  veya  $b$  sıfırdan farklı ise  $\langle a \rangle + \langle b \rangle$  idealinin herhangi bir üreticine  $a$  ile  $b$ 'nin en büyük ortak böleni denir ve **ebob**( $a, b$ ) ile gösterilir. Yani  $\langle a \rangle + \langle b \rangle = \langle \text{ebob}(a, b) \rangle$  olur. Ayrıca  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle$  idealinin herhangi bir üreticine de  $a$  ile  $b$ 'nin en küçük ortak katı denir ve **ekok**( $a, b$ ) ile gösterilir. Yani  $\langle a \rangle \cap \langle b \rangle = \langle \text{ekok}(a, b) \rangle$  olur. Eğer  $\text{ebob}(a, b) = 1$  ise  $a$  ile  $b$  elemanlarına *aralarında asal* elemanlar denir.

En az biri sıfırdan farklı olan  $a_1, \dots, a_n \in R$  elemanları için de  $\text{ebob}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  ve  $\text{ekok}(a_1, a_2, \dots, a_n)$  benzer şekilde tanımlanır. Eğer  $\text{ebob}(a_1, a_2, \dots, a_n) = 1$  ise  $a_1, a_2, \dots, a_n$  elemanlarına *aralarında asal* elemanlar denir.

## Alıştırma 1.1

$R$  bir temel ideal bölgesi olsun. Aşağıdakileri gösteriniz:

- ①  $a, b, c \in R$  için  $\text{ebob}(a, c) = 1$  ve  $c \mid ab$  ise  $c \mid b$  olur.
- ②  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  elemanları aralarında asal ise

$$r_1 a_1 + \cdots + r_n a_n = 1$$

olacak şekilde  $r_1, r_2, \dots, r_n \in R$  elemanları vardır.

3  $a, b \in R$  için  $a \neq 0$  veya  $b \neq 0$  ise  $\frac{a}{\text{ebob}(a,b)}$  ve  $\frac{b}{\text{ebob}(a,b)}$  aralarında asaldır.

4  $a, b \in R$  için  $a$  ve  $b$  aralarında asal ise  $\text{ekok}(a, b) = ab$  olur.

5  $a_1, a_2, \dots, a_n \in R$  elemanları ikişerli aralarında asal olsun. Yani her  $i \neq j$  için  $\text{ebob}(a_i, a_j) = 1$  olsun. Her  $1 \leq i \leq n$  için

$$\widehat{a}_i = \frac{a_1 \cdots a_n}{a_i}$$

olsun. O zaman her  $1 \leq i \leq n$  için  $\text{ebob}(a_i, \widehat{a}_i) = 1$  olur. Ayrıca,  $\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n$  elemanları da aralarında asal olur, yani  $\text{ebob}(\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_n) = 1$  dir.

### Alıştırma 1.2

$F$  bir cisim ise  $F[x]$  polinom halkası bir temel ideal bölgedir, gösteriniz.

## 2 Mertebe Kavramı

Bu bölüm boyunca  $R$  bir temel ideal bölgesi ve  $M$  bir  $R$ -modülü olarak alınacaktır.

### Tanım 2.1: Mertebe

Eğer  $A \leq M$  ise  $A$  alt modülünün *mertebesi*  $o(A)$  ile gösterilir ve  $A^\#$  idealinin herhangi bir üretici olarak tanımlanır. Yani  $\alpha \in R$  için  $A^\# = R\alpha$  ise  $A$  alt modülünün mertebesi  $\alpha$ 'dır.

Bir  $\mathbf{m} \in M$  için de  $o(\mathbf{m})$  ile gösterilen *elemanın mertebesi*  $o(R\mathbf{m})$  olarak tanımlanır.

#### Not.

- (i) Eğer  $A = 0$  ise  $A^\# = R$  olduğundan  $o(A) = 1$  olarak tanımlanır.
- (ii) Eğer  $M$  serbest ise her  $A \leq M$  için  $A^\# = 0$  olduğundan  $o(A) = 0$  olur.
- (iii)  $A$  alt modülünün mertebesi muadil olma farkıyla tek türdür. Bun göre  $o(A)$  mertebesinin tüm muadilleri de  $o(A)$  olarak tanımlanır.
- (iv) Bir  $\mathbf{m} \in M$  için  $(R\mathbf{m})^\# = \mathbf{m}^\#$  olduğundan  $o(\mathbf{m})$ ,  $R$ 'nin  $\mathbf{m}$ 'yi sıfırlayan tüm elemanlarının bir ortak böleni olarak tanımlanır.

**Önerme 2.2**

- (i)  $A \leq B \leq M$  ise  $o(B) \mid o(A)$  olur.
- (ii)  $\mathbf{m} \in M$  için eğer  $\beta\mathbf{m} = 0$  ise  $o(\mathbf{m}) \mid \beta$  olur.
- (iii)  $A, B \leq M$  için  $M = A + B$  ise  $o(M) = \text{ekok}(o(A), o(B))$  olur.

**Kanıt.**

- (i)  $A \leq B$  ise  $B^\# \leq A^\#$  olduğundan  $B^\# = Ro(B)$  ve  $A^\# = Ro(A)$  için  $o(B) \mid o(A)$  olur.
- (ii)  $\beta \in \mathbf{m}^\# = Ro(\mathbf{m})$  olacağından  $\beta$ 'nin  $o(\mathbf{m})$ 'ye bölünebildiği görülür.
- (iii)  $o(A) = \alpha$ ,  $o(B) = \beta$  olsun.  $M = A + B$  ise  $M^\# = A^\# \cap B^\# = \langle \text{ekok}(\alpha, \beta) \rangle$  olduğundan  $o(M) = \text{ekok}(\alpha, \beta)$  olur. ■

**Teorem 2.3**

$\mathbf{m} \in M$ ,  $o(\mathbf{m}) = \alpha$  ve  $\beta \in R$  olsun. O zaman

$$o(\beta\mathbf{m}) = \frac{\alpha}{\text{ebob}(\alpha, \beta)}$$

olur. Özel olarak  $\alpha$  ve  $\beta$  aralarında asal ise  $o(\beta\mathbf{m}) = \alpha$  olur.

**Kanıt.**

$o(\mathbf{m}) = \alpha$  olduğundan  $\mathbf{m}^\# = \langle \alpha \rangle$  olur.  $\langle \gamma \rangle = (\beta\mathbf{m})^\#$  olsun.  $\gamma\beta\mathbf{m} = 0$  olduğundan  $\gamma\beta \in \mathbf{m}^\# = \langle \alpha \rangle$  olur. Yani  $\alpha \mid \gamma\beta$  olur. Buradan  $\frac{\alpha}{\text{ebob}(\alpha, \beta)} \mid \gamma \frac{\beta}{\text{ebob}(\alpha, \beta)}$  olduğu görülür.  $\frac{\beta}{\text{ebob}(\alpha, \beta)}$  ile  $\frac{\alpha}{\text{ebob}(\alpha, \beta)}$  aralarında asal olduğundan  $\frac{\alpha}{\text{ebob}(\alpha, \beta)} \mid \gamma$  olur. Öte yandan

$$\frac{\alpha}{\text{ebob}(\alpha, \beta)}(\beta\mathbf{m}) = \frac{\beta}{\text{ebob}(\alpha, \beta)}(\alpha\mathbf{m}) = 0$$

olduğundan  $\gamma \mid \frac{\alpha}{\text{ebob}(\alpha, \beta)}$  olur. Böylece  $\gamma$  ile  $\frac{\alpha}{\text{ebob}(\alpha, \beta)}$  muadil olur ve istenen sonuç elde edilir.

Teoremin son kısmı ise  $\text{ebob}(\alpha, \beta) = 1$  durumunun özel bir sonucudur. ■

**3 Devirli Modüller****Teorem 3.1**

$R$  bir TİB olsun. Buna göre her devirli  $R$ -modülün alt modülü de devirlidir.

**Kanıt.**

$M = R\mathbf{m}$  bir devirli  $R$ -modül ve  $A \leq M$  olsun. Kolayca görülebilir ki  $I = \{r \in R : r\mathbf{m} \in A\}$  kümesi  $R$ 'nin bir idealidir.  $R$  TİB olduğundan  $I = \langle \alpha \rangle$  biçiminde yazılabilir. Buna göre

$$A = I\mathbf{m} = \langle \alpha \rangle \mathbf{m} = R\alpha\mathbf{m} = \langle a\mathbf{m} \rangle$$

olur. Böylece  $A$  devirlidir. ■

### Teorem 3.2

$R$  bir TİB ve  $M$  bir devirli modül olsun. Aşağıdakiler sağlanır:

- (i)  $A_1, \dots, A_k$ ,  $M$ 'nin alt modülleri olsun. Eğer  $A_1, \dots, A_k$  modüllerinin mertebeleri ikişerli aralarında asal ise  $\{A_1, \dots, A_k\}$  ailesi bağımsızdır; yani  $A_1 + \dots + A_k = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$  biçiminde yazılabilir.
- (ii)  $\mathbf{m}_1, \dots, \mathbf{m}_k \in M$  elemanlarının mertebeleri ikişerli aralarında asal ise

$$o(\mathbf{m}_1 + \dots + \mathbf{m}_k) = o(\mathbf{m}_1) \cdots o(\mathbf{m}_k)$$

ve

$$\langle \mathbf{m}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{m}_k \rangle = \langle \mathbf{m}_1 + \dots + \mathbf{m}_k \rangle$$

olur.

- (iii)  $\mathbf{m} \in M$  ve ikişerli aralarında asal olan  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in R$  elemanları için

$$o(\mathbf{m}) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k$$

ise  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \dots + \mathbf{m}_k$  ve her  $i$  için  $o(\mathbf{m}_i) = \alpha_i$  olacak şekilde  $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_k \in M$  elemanları vardır. Bu durumda

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{m}_1 \rangle \oplus \dots \oplus \langle \mathbf{m}_k \rangle$$

olur.

**Kanıt.**

(i)  $a_i = o(A_i)$  olsun.  $\mathbf{x} \in A_1 \cap (A_2 + \dots + A_k)$  ise  $\mathbf{x} \in A_1$  olduğundan  $a_1\mathbf{x} = 0$  olur. Öte yandan  $\mathbf{x} \in A_2 + \dots + A_k$  olduğundan  $a_2 a_3 \cdots a_k \mathbf{x} = 0$  olur.  $a_1$  ile  $a_2 a_3 \cdots a_k$  aralarında asal olduğundan  $ua_1 + v(a_2 \cdots a_k) = 1$  olacak şekilde  $u, v \in R$  bulunur. Buna göre  $\mathbf{x} = ua_1\mathbf{x} + v(a_2 \cdots a_k)\mathbf{x} = 0$  olur. Böylece  $A_1 \cap (A_2 + \dots + A_k) = 0$  olur. Benzer şekilde  $A_2 \cap (A_1 + A_3 + \dots + A_k) = 0$  vb. elde edilebilir. Böylece  $\{A_1, \dots, A_k\}$  ailesi bağımsızdır.

(ii)  $o(\mathbf{m}_i) = \alpha_i$  olsun. Önce  $\langle \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k \rangle = \langle \mathbf{m}_1 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{m}_k \rangle$  olduğunu gösterelim.  $\langle \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k \rangle \subseteq \langle \mathbf{m}_1 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{m}_k \rangle$  olduğu açıktır.  $\alpha = \alpha_1 \cdots \alpha_k$  ve her  $1 \leq i \leq k$  için  $\beta_i = \alpha / \alpha_i$  olsun. Her  $1 \leq i \leq k$  için  $\beta_i \cdot (\mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k) = \beta_i \mathbf{m}_1 + \cdots + \beta_i \mathbf{m}_k = \beta_i \cdot \mathbf{m}_i$  olur. Diğer taraftan,  $\beta_i$  ile  $\alpha_i$  aralarında asal olduğundan  $1 = u\beta_i + v\alpha_i$  olacak şekilde  $u, v \in R$  bulunur. Buna göre  $\mathbf{m}_i = u\beta_i \cdot \mathbf{m}_i + v\alpha_i \cdot \mathbf{m}_i = u\beta_i \cdot \mathbf{m}_i = \beta_i \cdot (\mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k) \in \langle \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k \rangle$  olur. Böylece  $\langle \mathbf{m}_1 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{m}_k \rangle \subseteq \langle \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k \rangle$  olur ve istenen eşitlik elde edilir.

Şimdi  $o(\mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k)$ 'yi bulalım.

$$\begin{aligned}
 o(\mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k) &= o(\langle \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k \rangle) \\
 &= (\langle \mathbf{m}_1 \rangle + \cdots + \langle \mathbf{m}_k \rangle)^\# \\
 &= \langle \mathbf{m}_1 \rangle^\# \cap \cdots \cap \langle \mathbf{m}_k \rangle^\# \\
 &= \langle \alpha_1 \rangle \cap \cdots \cap \langle \alpha_k \rangle \\
 &= \langle \text{ekok}(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \rangle \\
 &= \langle \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \rangle \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_k \text{ aralarında asal olduğundan})
 \end{aligned}$$

ve böylece  $o(\mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k$  bulunur. Ayrıca (i)'den dolayı

$$\langle \mathbf{m}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{m}_k \rangle = \langle \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k \rangle$$

olur.

(iii)  $o(\mathbf{m}) = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k$  olduğundan  $\mathbf{m}^\# = \langle \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k \rangle$  olur. Her  $1 \leq i \leq k$  için  $\beta_i = \alpha_1 \cdots \alpha_{i-1} \alpha_{i+1} \cdots \alpha_k$  olsun. Kolayca görülebilir ki her  $1 \leq i \leq k$  için  $\text{ebob}(\alpha_i, \beta_i) = 1$  olur. Buna göre  $\beta_i \mathbf{m}$  elemanının mertebesi

$$o(\beta_i \mathbf{m}) = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k}{\text{ebob}(\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k, \beta_i)} = \frac{\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_k}{\beta_i} = \alpha_i$$

olur.  $\beta_1, \dots, \beta_k$  elemanları ikişerli aralarında asal olduğundan

$$\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k = 1$$

olacak şekilde  $u_1, \dots, u_k \in R$  bulunur. Buna göre

$$\mathbf{m} = 1 \cdot \mathbf{m} = (\beta_1 u_1 + \cdots + \beta_k u_k) \cdot \mathbf{m} = u_1 (\beta_1 \cdot \mathbf{m}) + \cdots + u_k (\beta_k \cdot \mathbf{m})$$

olur. Böylece  $\mathbf{m}_i = u_i \beta_i \cdot \mathbf{m}$  olarak alınırsa  $\beta_i$  ve  $u_i$  aralarında asal olduğundan

$$o(\mathbf{m}_i) = o(u_i \beta_i \cdot \mathbf{m}) = o(\beta_i \cdot \mathbf{m}) = \alpha_i$$

ve  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \cdots + \mathbf{m}_k$  olur. Ayrıca (ii)'den dolayı

$$\langle \mathbf{m} \rangle = \langle \mathbf{m}_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \langle \mathbf{m}_k \rangle$$

olur. ■

## 4 TİB Üzerindeki Serbest Modüller

Bu bölümde  $R$  bir TİB olmak üzere,  $R$  üzerindeki sonlu üretilmiş serbest modüller incelenecektir. Bu bağlamda, bir sonlu üretilmiş serbest  $R$ -modülün her alt modülünün de serbest olduğu gösterilecektir. Bu sonuç genel olarak sonlu üretilmiş olmayan serbest  $R$ -modüller için de geçerli olduğu halde ispatı, iyi sıralama ilkesine denk olan seçme aksiyomunun kabulünü gerektirir. Hem daha karmaşık olması hem de bu notların kapsamını aşması nedeniyle bu ispat burada verilmemektedir. Genel teoremi vermeden önce bazı hazırlayıcı lemmaları ispatlayalım.

### Lemma 4.1

$R$  bir TİB ve  $M$  bir serbest  $R$ -modül ve  $\{e_1, \dots, e_n\}$ ,  $M$ 'nin bir bazı olsun.  $\mathbf{m} \in M$  ve  $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^n r_i \cdot e_i$  yazımı için  $\langle r_1, \dots, r_n \rangle$  ideali  $M$ 'nin bazının seçiminden bağımsızdır ve yalnızca  $\mathbf{m}$ 'ye bağlıdır. (Bu ideale  $\mathbf{m}$ 'nin *kapsam ideali* denir ve  $\kappa(\mathbf{m})$  ile gösterilir.)

*Kanıt.*

$M$ 'nin bir  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  bazı için  $\mathbf{m} = r'_1 \cdot e'_1 + \dots + r'_n \cdot e'_n$  biçiminde yazılsın.  $e_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot e'_j$  olsun. Buna göre

$$\mathbf{m} = \sum_{i=1}^n r'_i \cdot e'_i = \sum_{i=1}^n r'_i \cdot \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot e'_j = \sum_{j=1}^n \left( \sum_{i=1}^n r'_i a_{ij} \right) \cdot e'_j$$

olur. Böylece her  $1 \leq j \leq n$  için  $r_j = \sum_{i=1}^n r'_i a_{ij}$  olur. Bu durumda  $r_j$ 'lerin her biri  $r'_1, \dots, r'_n$  tarafından üretilen idealin elemanı olur. Benzer şekilde her  $1 \leq j \leq n$  için  $r'_j = \sum_{i=1}^n r_i b_{ij}$  olacak şekilde  $b_{ij} \in R$  elemanları bulunabilir. Bu durumda  $r'_j$ 'lerin her biri de  $r_1, \dots, r_n$  tarafından üretilen idealin elemanı olur. Yani

$$\langle r_1, \dots, r_n \rangle = \langle r'_1, \dots, r'_n \rangle$$

olur. ■

### Lemma 4.2

$R$  bir TİB,  $M$  bir serbest  $R$ -modül ve  $\mathbf{m} \in M$  olsun.  $c_{\mathbf{m}} \in R$ ,  $\mathbf{m}$ 'nin kapsam idealinin bir üreteci olsun; yani  $\kappa(\mathbf{m}) = Rc_{\mathbf{m}}$  olsun. O zaman  $\mathbf{m} = c_{\mathbf{m}} \cdot e'_1$  olacak şekilde  $M$ 'nin bir  $\{e'_1, \dots, e'_n\}$  bazı vardır.

*Kanıt.*

$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ,  $M$ 'nin bir bazı olsun.  $n$  üzerine tümevarım uygulayacağız. Eğer  $n = 1$  ise  $\mathbf{m} = r_1 \mathbf{e}_1$  olacak şekilde bir  $r_1 \in R$  vardır. Bu durumda  $\cong \mathbf{m} = Rr_1 = Rc_{\mathbf{m}}$  olduğundan  $r_1$  ile  $c_{\mathbf{m}}$  muadil olur. Yani  $r_1 = uc_{\mathbf{m}}$  olacak şekilde birimsel  $u \in R$  vardır. Buna göre  $\mathbf{m} = r_1 \cdot \mathbf{e}_1 = uc_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{e}_1 = c_{\mathbf{m}}(u \cdot \mathbf{e}_1)$  olur.  $\{\mathbf{e}'_1 = u \cdot \mathbf{e}_1\}$  bazı için istenen sonuç elde edilir.

Şimdi  $n > 1$  için varsayalım ki önerme doğru olsun.  $\mathbf{m} = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \mathbf{e}_i$  yazalım. Buna göre

$$\kappa(\mathbf{m}) = Rc_{\mathbf{m}} = Rr_1 + \dots + Rr_n$$

olur. Dikkat edilirse,  $c_{\mathbf{m}} = 0$  ancak ve ancak  $\mathbf{m} = 0$  dir. Dolayısıyla  $c_{\mathbf{m}} \neq 0$  kabul edebiliriz.  $w = \sum_{i=2}^n nr_i \cdot \mathbf{e}_i$  olsun. O zaman  $\mathbf{m} = w + r_1 \cdot \mathbf{e}_1$  olur.  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=2}^n$ ,  $M' = \langle \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \rangle$  serbest modülünün bir bazıdır. Tümevarım varsayımını  $M'$  için uygularsak,  $w$ 'nun kapsam idealinin bir üretici olan  $c_w \in R$  için  $w = c_w \cdot \mathbf{e}'_2$  olacak şekilde  $M'$ 'nin bir  $\{\mathbf{e}''_2, \dots, \mathbf{e}''_n\}$  bazı vardır. Dolayısıyla,  $Rc_w = Rr_2 + \dots + Rr_n$  olur. Buna göre

$$Rc_{\mathbf{m}} = \sum_{i=1}^n Rr_i = Rr_1 + \sum_{i=2}^n Rr_i = Rr_1 + Rc_w$$

olduğundan,  $c_{\mathbf{m}} = ur_1 + vc_w$ ,  $r_1 = ac_{\mathbf{m}}$  ve  $c_w = bc_{\mathbf{m}}$  olacak şekilde  $u, v, a, b \in R$  elemanları vardır. Buna göre  $c_{\mathbf{m}} = uac_{\mathbf{m}} + vbc_{\mathbf{m}} = (ua + vb)c_{\mathbf{m}}$  ve  $c_{\mathbf{m}}$  sıfırdan farklı olduğundan  $ua + vb = 1$  olur.

$\mathbf{e}'_1 = a \cdot \mathbf{e}_1 + b \cdot \mathbf{e}'_2$ ,  $\mathbf{e}'_2 = v \cdot \mathbf{e}_1 - u \cdot \mathbf{e}''_2$  ve her  $i \geq 3$  için  $\mathbf{e}'_i = \mathbf{e}''_i$  olarak tanımlayalım. Buna göre

$$Re'_1 + Re'_2 \subseteq Re_1 + Re''_2$$

. Öte yandan,  $ua + vb = 1$  olduğundan

$$\mathbf{e}_1 = u \cdot \mathbf{e}'_1 + b \cdot \mathbf{e}'_2 \in Re'_1 + Re'_2$$

ve

$$\mathbf{e}''_2 = v \cdot \mathbf{e}'_1 - a \cdot \mathbf{e}'_2 \in Re'_1 + Re'_2$$

olur. Böylece

$$Re_1 + Re''_2 = Re'_1 + Re'_2$$

olur. Dolayısıyla  $Re_1 + Re''_2 = Re'_1 + Re'_2$  olur. Buna göre

$$M = Re_1 + Re''_2 + \dots + Re''_n = Re'_1 + Re'_2 + \dots + Re'_n$$

olur. Son olarak,  $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  kümesinin lineer bağımsız olduğunu da gösterelim. Eğer  $s_1, \dots, s_n \in R$  için  $s_1 \cdot \mathbf{e}'_1 + \dots + s_n \cdot \mathbf{e}'_n = 0$  ise

$$s_1(a \cdot \mathbf{e}_1 + b \cdot \mathbf{e}''_2) + s_2(v \cdot \mathbf{e}_1 - u \cdot \mathbf{e}''_2) + \dots + s_n \cdot \mathbf{e}''_n = 0$$

olur. Buna göre  $(s_1a + s_2v) \cdot \mathbf{e}_1 + (s_1b - s_2u) \cdot \mathbf{e}''_2 + \dots + s_n \cdot \mathbf{e}''_n = 0$  olur.  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}''_2, \dots, \mathbf{e}''_n\}$  lineer bağımsız olduğundan  $s_1a + s_2v = 0$ ,  $s_1b - s_2u = 0$  ve  $s_3 = 0, \dots, s_n = 0$  olur. Buradan  $s_1 = s_1(ua + vb) = 0$  ve dolayısıyla  $s_2 = 0$  olur. Böylece  $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  lineer bağımsızdır. Son olarak  $\mathbf{m} = r_1 \cdot \mathbf{e}_1 + w = ac_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{e}_1 + c_w \cdot \mathbf{e}''_2 = c_{\mathbf{m}}(a \cdot \mathbf{e}_1 + b \cdot \mathbf{e}''_2) = c_{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{e}'_1$  olur. Böylece kanıt tamamlanır. ■

*Not.*  $R$  bir TİB,  $M$  bir serbest  $R$ -modül ve  $\text{rank } M < \infty$  olsun.  $A \leq M$  bir alt modül olsun.  $R$  bir Noether halkası olduğundan

$$\{\kappa(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in A\}$$

kümesinin bir maksimal elemanı vardır. Bir  $\mathbf{a} \in A$  için  $\kappa(\mathbf{a})$  maksimal ise  $\kappa(\mathbf{a})$  ideale bir *maksimal kapsam ideali* diyeceğiz.

### Lemma 4.3

$R$  bir TİB,  $M$  bir serbest  $R$ -modül ve  $\text{rank } M < \infty$  olsun.  $A \leq M$  ve bir  $\mathbf{a} \in A$  için  $\kappa(\mathbf{a}) = Rc_{\mathbf{a}}$  bir maksimal kapsam ideali olsun. O zaman her  $\mathbf{y} \in A$  için  $\kappa(\mathbf{a}) \supseteq \kappa(\mathbf{y})$  olur.

**Kanıt.**

Yukarıdaki lemmadan,  $M$ 'nin öyle bir  $\{\mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$  bazı vardır ki  $\mathbf{a} = c_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e}'_1$  olur.  $\mathbf{y} \in A$  olsun. O zaman  $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^n r_i \cdot \mathbf{e}'_i$  olacak şekilde uygun  $r_i \in R$  elemanları vardır.  $R$  bir TİB olduğundan  $Rc_{\mathbf{a}} + Rr_1 = Rt$  olacak şekilde bir  $t \in R$  vardır. Buna göre uygun  $u, v \in R$  için  $t = uc_{\mathbf{a}} + vr_1$  yazılabilir.

$$u \cdot \mathbf{a} + v \cdot \mathbf{y} = uc_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e}'_1 + v \cdot \left( \sum_{i=1}^n r_i \cdot \mathbf{e}'_i \right) = t\mathbf{e}'_1 + \sum_{i=2}^n r_i \cdot \mathbf{e}'_i$$

$A$ 'nın bir elemanı ve  $\kappa(\mathbf{a}) = Rc_{\mathbf{a}} \subseteq Rt \subseteq \kappa(u \cdot \mathbf{a} + v \cdot \mathbf{y})$  olacağından  $\kappa(\mathbf{a}) = Rt = \kappa(u \cdot \mathbf{a} + v \cdot \mathbf{y})$  olur. Buradan  $Rc_{\mathbf{a}} = \kappa(\mathbf{a}) = Rt = \kappa(\mathbf{a}) + Rr_1$  ve böylece  $r_1 = wc_{\mathbf{a}}$  olacak şekilde bir  $w \in R$  vardır. Özel olarak,  $Rr_1 \subseteq Rc_{\mathbf{a}} = \kappa(\mathbf{a})$  olur. Diğer taraftan

$$(1 - w) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{y} = (1 - w)c_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e}'_1 + \sum_{i=1}^n r_i \cdot \mathbf{e}'_i = c_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{e}'_1 + \sum_{i=2}^n r_i \cdot \mathbf{e}'_i$$

$A$ 'nın bir elemanı ve böylece  $\kappa(\mathbf{a}) = Rc_{\mathbf{a}} \subseteq Rc_{\mathbf{a}} + \sum_{i=2}^n Rr_i \subseteq \kappa((1 - w) \cdot \mathbf{a} + \mathbf{y})$  olacağından  $\kappa(\mathbf{a})$  idealinin maksimalliği nedeniyle  $Rc_{\mathbf{a}} = \kappa(\mathbf{a}) = Rc_{\mathbf{a}} + \sum_{i=2}^n Rr_i$  olur. Buradan her  $2 \leq i \leq n$  için  $r_i \in Rc_{\mathbf{a}}$  bulunur. Dolayısıyla  $\kappa(\mathbf{y}) = Rr_1 + Rr_2 + \dots + Rr_n \subseteq Rc_{\mathbf{a}}$  olur.  $\mathbf{y} \in A$  keyfi olduğundan kanıt tamamlanır. ■

Yukarıdaki iki lemmanın yardımıyla şimdi ana teoremi ispatlayabiliriz.

### Teorem 4.4

$R$  bir TİB,  $M$  bir serbest  $R$ -modül ve  $\text{rank } M < \infty$  olsun.  $A \leq M$  olsun. O zaman  $M$ 'nin öyle bir  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  bazı ve  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$  vardır ki

$$R\alpha_1 \supseteq R\alpha_2 \supseteq \dots \supseteq R\alpha_n$$

ve  $A = R\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + R\alpha_n \cdot \mathbf{e}_n$  olur.

**Kanıt.**

$n$  üzerine tümevarım uygulayacağız. Eğer  $n = 1$  ise  $M = R\mathbf{e}_1$  olur.  $A \leq M$  olduğundan  $\mathbf{a} \in M$  için  $A = R\mathbf{a}$  ve  $\mathbf{a} = \alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1$  olur. Böylece  $A = R\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1$  olur.

Şimdi  $n > 1$  ve önerme  $n$ 'den küçük ranklı olan her serbest modül için doğru olsun.  $R$  bir Noether halkası olduğundan,  $\{\kappa(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in A, \mathbf{x} \neq 0\}$  kümesinin bir maksimal elemanı vardır.  $A = \{0\}$  durumunda teorem aşıkardır, dolayısıyla  $A \neq \{0\}$  olduğunu varsayabiliriz. Bir  $\mathbf{a} \in A$  seçelim öyle ki  $\kappa(\mathbf{a}) = R\alpha_1$  maksimal olsun. Önceki lemmadan dolayı,  $M$ 'nin öyle bir  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$  bazı vardır ki  $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{y}_1$  olur.  $M' = R\mathbf{y}_2 \oplus \dots \oplus R\mathbf{y}_n$  olarak tanımlayalım. Bu durumda  $M = R\mathbf{y}_1 \oplus M'$  olur ve  $M'$ ,  $n - 1$  ranklı serbest bir modüldür.

$A' = A \cap M'$  olsun. İddia ediyoruz ki  $A = R\mathbf{a} \oplus A'$  dir.  $R\mathbf{a} \cap A' = \{0\}$  olduğu açıktır (çünkü  $R\mathbf{a} \subseteq R\mathbf{y}_1$  ve  $M' \cap R\mathbf{y}_1 = \{0\}$ ). Şimdi  $\mathbf{x} \in A$  olsun.  $\{\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_n\}$  bazına göre  $\mathbf{x} = r_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}'$  yazılabilir (burada  $\mathbf{x}' \in M'$ ). Maksimal kapsam ideali lemmasından dolayı,  $\kappa(\mathbf{x}) \subseteq \kappa(\mathbf{a}) = R\alpha_1$  olur.  $\mathbf{x}'$ 'in koordinatlarından oluşan ideal  $\kappa(\mathbf{x})$  olduğundan  $r_1 \in \kappa(\mathbf{x}) \subseteq R\alpha_1$  dir. O halde  $r_1 = k\alpha_1$  olacak şekilde bir  $k \in R$  vardır.

Şimdi  $\mathbf{z} = \mathbf{x} - k\mathbf{a}$  elemanını düşünelim.

$$\mathbf{z} = (r_1 \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}') - k(\alpha_1 \mathbf{y}_1) = (r_1 - k\alpha_1) \mathbf{y}_1 + \mathbf{x}' = \mathbf{x}'$$

olur.  $\mathbf{x} \in A$  ve  $\mathbf{a} \in A$  olduğundan  $\mathbf{z} \in A$  olur. Ayrıca  $\mathbf{z} = \mathbf{x}' \in M'$  olduğundan  $\mathbf{z} \in A' = A \cap M'$  olur. Böylece  $\mathbf{x} = k\mathbf{a} + \mathbf{z}$  yazılabilir, yani  $A = R\mathbf{a} + A'$  dir.

Şimdi tümevarım varsayımını  $M'$  ve onun alt modülü  $A'$  için uygulayalım.  $M'$ 'nin öyle bir  $\{\mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$  bazı ve  $\alpha_2, \dots, \alpha_n \in R$  elemanları vardır ki

$$R\alpha_2 \supseteq R\alpha_3 \supseteq \dots \supseteq R\alpha_n$$

ve  $A' = R\alpha_2 \cdot \mathbf{e}_2 \oplus \dots \oplus R\alpha_n \cdot \mathbf{e}_n$  sağlanır. Burada  $\mathbf{e}_1 = \mathbf{y}_1$  olarak tanımlayalım.  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ ,  $M$  için bir baz oluşturur. Ayrıca  $A = R\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 \oplus A' = R\alpha_1 \cdot \mathbf{e}_1 \oplus R\alpha_2 \cdot \mathbf{e}_2 \oplus \dots \oplus R\alpha_n \cdot \mathbf{e}_n$  olur.

Son olarak  $R\alpha_1 \supseteq R\alpha_2$  olduğunu göstermeliyiz.  $\mathbf{h} = \alpha_2 \cdot \mathbf{e}_2$  elemanını düşünelim.  $\mathbf{h} \in A'$  olduğundan  $\mathbf{h} \in A$  dir. Maksimal kapsam ideali lemmasından dolayı  $\kappa(\mathbf{h}) \subseteq \kappa(\mathbf{a}) = R\alpha_1$  olmalıdır.  $\mathbf{h}$ 'nin  $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$  bazına göre koordinatları  $(0, \alpha_2, 0, \dots, 0)$  dir. Dolayısıyla  $\kappa(\mathbf{h}) = R\alpha_2$  olur. Böylece  $R\alpha_2 \subseteq R\alpha_1$  elde edilir. Tümevarım ilkesi gereği teorem ispatlanmış olur. ■

Bu teoremin önemli bir sonucu olarak, TİB üzerindeki sonlu üretilmiş modüllerin yapı teoremini verebiliriz.

**Teorem 4.5**

$R$  bir TİB ve  $M$  sonlu üretilmiş bir  $R$ -modül olsun. O zaman

$$M \cong R^k \oplus R/\langle d_1 \rangle \oplus R/\langle d_2 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle d_m \rangle$$

olacak şekilde bir  $k \geq 0$  tam sayısı ve sıfırdan ve birimselden farklı  $d_1, d_2, \dots, d_m \in R$  elemanları vardır. Ayrıca  $d_1 \mid d_2 \mid \dots \mid d_m$  sağlanır (yani  $Rd_1 \supseteq Rd_2 \supseteq \dots \supseteq Rd_m$ ). Bu  $k$  tam sayısına ve  $\langle d_i \rangle$  ideallerine  $M$ 'nin *değişmez çarpanları* denir ve bu değişmezler tek türlü belirlidir.

**Kanıt.**

$M$  sonlu üretilmiş olduğundan,  $M \cong F/K$  olacak şekilde sonlu ranklı bir serbest  $R$ -modül  $F$  ve  $F$ 'nin bir  $K$  alt modülü vardır. Önceki teoremden dolayı,  $F$ 'nin bir  $\{e_1, \dots, e_n\}$  bazı ve  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$  elemanları seçilebilir öyle ki  $K = R\alpha_1 e_1 \oplus \dots \oplus R\alpha_n e_n$  olur ve  $R\alpha_1 \supseteq \dots \supseteq R\alpha_n$  sağlanır. Burada bazı  $\alpha_i$ 'ler birimsel olabilir (bu durumda  $R/\langle \alpha_i \rangle = 0$ ) veya 0 olabilir (bu durumda  $R/\langle 0 \rangle \cong R$ ). Buna göre

$$M \cong \frac{Re_1 \oplus \dots \oplus Re_n}{R\alpha_1 e_1 \oplus \dots \oplus R\alpha_n e_n} \cong \frac{Re_1}{R\alpha_1 e_1} \oplus \dots \oplus \frac{Re_n}{R\alpha_n e_n} \cong R/\langle \alpha_1 \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle \alpha_n \rangle$$

elde edilir. Birimsel olan  $\alpha_i$ 'ler atılıp, sıfır olanlar  $R$  faktörü olarak (serbest kısım) başa yazılırsa istenen form elde edilir. ■

## 5 Asıl (Primary) Devirli Ayrışım

Bir önceki bölümde, sonlu üretilmiş her  $R$ -modülün bir serbest kısım ve bir burulmalı (torsion) kısmın toplamı olduğunu görmüştük. Şimdi burulmalı kısmın iç yapısına odaklanacağız.

### Tanım 5.1: $p$ -Asıl Modül

$R$  bir TİB ve  $p \in R$  bir asal eleman olsun. Bir  $M$  modülünün her elemanının mertebesi  $p$ 'nin bir kuvveti ise,  $M$ 'ye  **$p$ -asıl modül** (veya  $p$ -primary modül) denir.

Genel bir burulmalı modül, farklı  $p$  asallarına karşılık gelen  $p$ -asıl modüllerin toplamı olarak yazılabilir. Buna **Asıl Ayrışım Teoremi** denir.

### Teorem 5.2: Asıl Devirli Ayrışım Teoremi (The Primary Cyclic Decomposition)

$R$  bir TİB ve  $M$  sonlu üretilmiş bir burulmalı  $R$ -modül olsun. O zaman  $M$ , asıl devirli alt modüllerin direkt toplamı olarak yazılabilir:

$$M \cong \left( R/\langle p_1^{e_{11}} \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle p_1^{e_{1k_1}} \rangle \right) \oplus \dots \oplus \left( R/\langle p_m^{e_{m1}} \rangle \oplus \dots \oplus R/\langle p_m^{e_{mk_m}} \rangle \right)$$

Burada  $p_1, \dots, p_m$  birbirinden farklı asal elemanlardır ve  $e_{i1} \geq \dots \geq e_{ik_i}$  pozitif tam

sayılardır. Bu ayrışımındaki  $\{p_i^{e_{ij}}\}$  üreteçlerine  $M$ 'nin **Elementer Bölenleri** denir. Elementer bölenler, modülü (izomorfizma farkıyla) tek türlü belirler.

**Kant.**

İspatın ana fikri şudur:  $M$  sonlu üretilmiş ve burulmalı olduğundan, bir  $\alpha \neq 0$  için  $\alpha M = 0$  dir.  $R$  bir TİB olduğu için  $\alpha$ , asal çarpanlarına ayrılabilir:  $\alpha = up_1^{n_1} \cdots p_k^{n_k}$ . Çin Kalan Teoremi'nin modül versiyonu kullanılarak  $M$ ,  $M_{p_i}$  (her biri  $p_i^{n_i}$  tarafından sıfırlanan  $p$ -asıl alt modüller) bileşenlerine ayrılır:

$$M \cong M_{p_1} \oplus \cdots \oplus M_{p_k}$$

Daha sonra her bir  $M_{p_i}$  alt modülü, devirli modüllerin yapısı gereği  $R/\langle p_i^e \rangle$  formundaki devirli modüllerin toplamı olarak yazılır. ■

### Örnek: Elementer Bölenler

$R = \mathbb{Z}$  olsun. Mertebesi  $72 = 2^3 \cdot 3^2$  olan bir  $M$  değişmeli grubu ( $\mathbb{Z}$ -modülü) düşünelim. Olası elementer bölenler  $72$ 'nin asal çarpanlarının parçalanışlarıdır.  $2^3$  için olası parçalanışlar:  $(2^3)$ ,  $(2^2, 2)$ ,  $(2, 2, 2)$ .  $3^2$  için olası parçalanışlar:  $(3^2)$ ,  $(3, 3)$ . Bu parçaların kombinasyonları farklı (izomorf olmayan) modül yapılarını verir. Örneğin:

$$\mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_{72}$$

$$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$$

gibi.

## 6 Değişmez Çarpanlar Ayrışımı (Invariant Factor Decomposition)

Asal ayrışım modülü en küçük parçalarına ayırır. Bazen bu küçük parçaları birleştirerek daha büyük, birbirini bölen bloklar oluşturmak yapısal analiz için daha faydalıdır. Bu forma **Değişmez Çarpanlar Formu** denir.

### Teorem 6.1: Değişmez Çarpanlar Ayrışım Teoremi

$R$  bir TİB ve  $M$  sonlu üretilmiş bir burulmalı  $R$ -modül olsun.  $M$ , aşağıdaki şartları sağlayan devirli alt modüllerin direkt toplamı olarak tek türlü yazılabilir:

$$M \cong R/\langle d_1 \rangle \oplus R/\langle d_2 \rangle \oplus \cdots \oplus R/\langle d_k \rangle$$

Burada  $d_1, d_2, \dots, d_k \in R$  sıfırdan farklı ve birimsel olmayan elemanlardır ve şu bölünebilme zincirini sağlarlar:

$$d_k \mid d_{k-1} \mid \dots \mid d_1$$

Bu  $d_i$  elemanlarına  $M$ 'nin **Değişmez Çarpanları** (Invariant Factors) denir.

**Kanıt.**

Teorem 5.2'deki gibi  $\{e_{ij}\}$  elemanter bölenlerinden  $d_i$ 'leri oluşturabiliriz. Buna göre Asıl Ayrışım Teoremindeki her asal için en yüksek  $e_{ij}$  kuvvetlerini seçip çarparak  $d_k$ 'yı (en büyük değişmez çarpanı) buluruz. Sonra kalanların en büyüklerini seçip çarparak  $d_{k-1}$ 'i buluruz ve bu şekilde devam ederiz.  $e_{ij}$  kuvveti kalmayan bir asal için 1 çarpanı alınır (çünkü 1 her elemanı böler). Böylece  $d_k \mid d_{k-1} \mid \dots \mid d_1$  sağlanır. ■

**Örnek: Elemanter Bölenlerden Değişmez Çarpanlara**

Bir  $\mathbb{Z}$ -modülün elemanter bölenleri  $\{2^2, 2, 2, 3^3, 3, 5^2\}$  olsun. Gruplama yapalım:

- En büyük kuvvetler:  $2^2, 3^3, 5^2 \implies d_k = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^2 = 2700$ .
- Kalanların en büyükleri:  $2, 3 \implies d_{k-1} = 2 \cdot 3 = 6$ .
- Kalanlar:  $2 \implies d_{k-2} = 2$ .

Böylece değişmez çarpanlar:  $2 \mid 6 \mid 2700$ . Modülün yapısı:  $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{2700}$ .

## 7 Devirli Modüllerin Karakterizasyonu

Hangi koşullar altında sonlu üretilmiş bir modülün tek bir üretici vardır (yani devirlidir)? Bu soru, lineer cebirde "bir operatörün karakteristik polinomu minimal polinomuna ne zaman eşittir?" sorusunun modül teorisindeki karşılığıdır.

**Teorem 7.1: Devirli Modüllerin Karakterizasyonu**

$R$  bir TİB ve  $M$  sonlu üretilmiş bir burulmalı  $R$ -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

1.  $M$  devirlidir (yani  $M \cong R/\langle \mu \rangle$  olacak şekilde bir  $\mu$  vardır).
2.  $M$ 'nin elemanter bölenleri ikişerli aralarında asaldır.
3.  $M$ 'nin sadece bir tane değişmez çarpanı vardır (yani  $k = 1$  ve  $M \cong R/\langle d_1 \rangle$ ).
4.  $M$ 'nin sıfırlayanı (annihilator),  $M$ 'nin karakteristik idealine (elemanter bölenlerin çar-

pımı) eşittir. (Linear cebirde: Minimal polinom= Karakteristik polinom).

**Kanıt.**

(1)  $\iff$  (2): Çin Kalan Teoremi'nin bir sonucudur.  $R/\langle a \rangle \oplus R/\langle b \rangle \cong R/\langle ab \rangle$  olması için gerek ve yeter şart  $\text{ebob}(a, b) = 1$  olmasıdır. Eğer elemanter bölenler aralarında asal değilse (örneğin  $2^2$  ve 2), bunları tek bir devirli modülde birleştiremeyiz.

(1)  $\iff$  (3): Değişmez çarpanlar teoreminin formülasyonundan açıktır. Eğer birden fazla değişmez çarpan varsa ( $d_1 \mid d_2$  ve  $d_1$  birimsel değil),  $R/\langle d_1 \rangle \oplus R/\langle d_2 \rangle$  yapısı devirli olamaz çünkü her eleman  $d_2$  tarafından sıfırlanır ama modülün "büyüklüğü" (karakteristik ideal)  $d_1 d_2$  mertebesindedir. Devirli bir modülde sıfırlayan ideal ile modülün düzeni aynı olmalıdır. ■

**Not.**

Linear cebirde bu teorem şu anlama gelir: Bir  $T$  lineer operatörünün devirli bir vektör uzayı oluşturması için (yani  $V = Z(\mathbf{v}; T)$  olacak şekilde bir  $\mathbf{v}$  vektörünün varlığı için) gerek ve yeter şart,  $T$ 'nin minimal polinomunun karakteristik polinomuna eşit olmasıdır.