

---

---

# BÖLÜM 1

---

## MODÜLLER

1	Modül Kavramı . . . . .	2
2	Alt Modüller . . . . .	3
3	Üreteç Kümeleri ve Sonlu Üretilmiş Modüller . . . . .	6
4	Bölüm Modülü . . . . .	8
5	Doğrusal Bağımsızlık, Taban ve Serbest Modül . . . . .	10
6	Torsiyon Elemanı ve Torsiyonsuz Eleman . . . . .	11
7	Sıfırlayan İdealler . . . . .	11
8	Modül Homomorfizmaları . . . . .	13
9	İzomorfizma Teoremleri . . . . .	14
10	Dik Toplamlar . . . . .	14
11	Serbest Modüllerin Rankı . . . . .	19
12	Artan Zincir Koşulu . . . . .	23

Bu bölümde, vektör uzaylarının bir genellemesi olan modüller ele alınacaktır. Modüller, skaler çarpmanın bir cisim yerine bir *halkanın* elemanlarıyla yapılmasına olanak tanıyarak vektör uzayı kavramını genelleştirir. Bu genelleme, doğrusal cebirin bazı temel kavramlarının modüller bağlamında da geçerli olmasını sağlar. Ancak, modüller üzerinde bazı önemli farklılıklar ve zorluklar da ortaya çıkar. Özellikle, modüller üzerinde her zaman bir bazın varlığı garanti edilmez ve bazı modüller serbest olmayabilir. Bu nedenle, modüller üzerinde yapılan çalışmalar, vektör uzaylarına göre daha karmaşık ve zengin bir yapıya sahiptir. Biz bu bölümde, modüller üzerindeki ilgimizi, temel ideal bölgeleri üzerinde tanımlı modüllerle sınırlayacağız. Göreceğiz ki temel ideal bölgeleri üzerindeki modüller, nispeten iyi davranış gösterirler ve vektör uzaylarına benzer şekilde ele alınabilirler. Burada elde edilen sonuçları bir sonraki bölümde, doğrusal dönüşümler hakkında bilgi elde etmek için uygulayacağız.

# 1 Modül Kavramı

## Tanım 1.1: Modül

$R$  değişmeli ve birimli bir halka ve  $M$  boş olmayan bir küme olsun. Sırasıyla toplama ve skalerle çarpma denilen aşağıdaki gibi işlemler tanımlı olsun.

$$\begin{array}{ccc} M \times M \rightarrow M & \text{ve} & R \times M \rightarrow M \\ (x, y) \mapsto x + y & & (a, x) \mapsto a \cdot x \end{array}$$

Bu işlemler aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa  $(M, +, \cdot)$  sistemine  $R$  üzerinde bir *modül* denir:

1.  $(M, +)$  –birim elemanını  $\mathbf{0}$  ile göstereceğimiz– bir değişmeli gruptur.
2.  $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in M, \forall a, b \in R, a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) = a \cdot \mathbf{x} + a \cdot \mathbf{y}$ .
3.  $\forall \mathbf{x} \in M, \forall a, b \in R, (a + b) \cdot \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{x}$ .
4.  $\forall \mathbf{x} \in M, \forall a, b \in R, (ab) \cdot \mathbf{x} = a \cdot (b \cdot \mathbf{x})$ .
5.  $\forall \mathbf{x} \in M, 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$ .

### Not.

Modül kavramı, genel olarak değişmeli ya da birimli olmayan halkalar için de tanımlanabilir. Ancak, bu notlarda sadece değişmeli ve birimli halkalar üzerinde tanımlı modüllerle ilgileneceğiz. Bu nedenle modül yapısı söz konusu olduğunda, üzerinde tanımlı halka aksi belirtilmedikçe *değişmeli ve birimli halka* olarak kabul edilecektir.

### Örnek : (Bazı Modül Örnekleri)

1. Herhangi bir  $\mathbb{F}$  cismi ve  $\mathbb{F}$  üzerinde  $\mathcal{V}$  uzayı için  $(\mathcal{V}, +, \cdot)$  bir  $\mathbb{F}$ -modüldür. Yani vektör uzayları modüllerin özel bir durumu olarak düşünülebilir. durumu olarak düşünülebilir.
2. Herhangi bir halka  $R$ , kendisi üzerinde bir  $R$ -modüldür. Bu durumda toplama ve skalerle çarpma işlemleri halka üzerindeki işlemlerle aynıdır.
3. Herhangi bir abelyan grup  $(G, +)$ , tam sayılar halkası  $\mathbb{Z}$  üzerinde bir  $\mathbb{Z}$ -modüldür. Bu

modül yapısı şöyle tanımlanır:  $\forall n \in \mathbb{Z}$  ve  $\mathbf{g} \in G$  için

$$n \cdot \mathbf{g} = \begin{cases} \underbrace{\mathbf{g} + \mathbf{g} + \cdots + \mathbf{g}}_{n \text{ tane}}, & n > 0 \\ \mathbf{0}, & n = 0 \\ \underbrace{-\mathbf{g} + \mathbf{g} + \cdots + \mathbf{g}}_{-n \text{ tane}}, & n < 0 \end{cases}$$

4. Herhangi bir  $R$  halkası ve  $n \in \mathbb{N}^+$  için  $R^n = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) \mid r_i \in R, 1 \leq i \leq n\}$  kümesi  $R$  üzerinde bir modüldür. Toplama işlemi bileşensel olarak

$$(r_1, r_2, \dots, r_n) + (s_1, s_2, \dots, s_n) = (r_1 + s_1, r_2 + s_2, \dots, r_n + s_n)$$

şeklinde tanımlanır. Skalerle çarpma işlemi ise

$$a \cdot (r_1, r_2, \dots, r_n) = (ar_1, ar_2, \dots, ar_n)$$

şeklinindedir. Özel olarak  $n = 1$  için  $R^1$  kümesi,  $R$  halkasının kendisiyle aynıdır.

5. Herhangi bir  $R$  halkası ve  $n, m \geq 1$  tam sayıları için  $R^{n \times m} = \{(r_{ij}) \mid r_{ij} \in R, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$  matrisler kümesi  $R$  üzerinde bir modüldür. Toplama işlemi bileşensel, skalerle çarpma işlemi ise

$$a \cdot (r_{ij}) = (ar_{ij})$$

şeklinindedir.

## 2 Alt Modüller

### Tanım 2.1: Alt Modül

$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $N \subseteq M$  boş olmayan bir küme olsun. Eğer  $M$ 'deki işlemlerin  $N$  üzerine kısıtlaması  $N$  üzerinde de işlem tanımlıyor ve  $N$ , üzerinde tanımlı bu işlemlerle bir  $R$ -modül oluyorsa,  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir *alt modülü* denir ve  $N \leq M$  ile gösterilir.

### Teorem 2.2: Alt Modül Kriteri

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N \subseteq M$  boş olmayan alt küme olsun. Buna göre  $N \leq M$  ancak ve ancak her  $a, b \in R$  ve  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$  için  $a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y} \in N$  dir.

**Kanıt.**

( $\Rightarrow$ )  $N \leq M$  ise,  $N$  bir  $R$ -modül olduğundan, her  $a, b \in R$  ve  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$  için  $a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y} \in N$  dir.  
 ( $\Leftarrow$ ) Her  $a, b \in R$  ve  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$  için  $a \cdot \mathbf{x} + b \cdot \mathbf{y} \in N$  ise,  $N$  bir  $R$ -modülüdür. Öncelikle,  $\mathbf{0} \in N$  dir. Çünkü,  $N$  boş olmayan bir küme olduğundan,  $\mathbf{x} \in N$  için  $0 \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0} \in N$  dir. İkinci olarak, her  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$  için

$$\begin{aligned}\mathbf{x} + \mathbf{y} &= 1 \cdot \mathbf{x} + 1 \cdot \mathbf{y} \in N, \\ -\mathbf{x} &= 0 \cdot \mathbf{y} + (-1) \cdot \mathbf{x} \in N\end{aligned}$$

olur. Ayrıca, her  $a \in R$  ve  $\mathbf{x} \in N$  için


$$a \cdot \mathbf{x} = a \cdot \mathbf{x} + 0 \cdot \mathbf{x} \in N$$

olur. Diğer özellikler (toplamanın değişmeli ve birleşmeli oluşu, skalerle çarpmanın dağılma özelliği vs.)  $M$  içinde sağlandığından  $N$  içinde de sağlanır. Böylece  $N$  bir  $R$ -modülüdür ve dolayısıyla  $N \leq M$  dir. ■

**Not.**

Yukarıdaki teoremden verilen alt modül kriteri, her  $a \in R$  ve  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in N$  için,

- $\mathbf{x} - \mathbf{y} \in N$
- $a \cdot \mathbf{x} \in N$

koşullarının sağlanması ile denktir. (Nedenini araştırınız. ) Bu ikincisi çoğu durumda daha kullanışlı bir test imkanı sunar.

Alt modül kriterini kullanarak aşağıdaki iki önermeyi kolayca elde edebiliriz.

### Önerme 2.3

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $\{N_i\}_{i \in I}$   $M$ 'nin alt modülleri olsun. Buna göre

$$\bigcap_{i \in I} N_i$$

kümesi  $M$ 'nin bir alt modülüdür.

**Önerme 2.4**

$R$  bir halka,  $I$ ,  $R$ 'nin bir ideali,  $M$  bir  $R$ -modül olsun ve  $N \leq M$  olsun. Buna göre

$$IN := \{(r \cdot \mathbf{x}) \mid r \in I, \mathbf{x} \in N\}$$

kümesi  $M$ 'nin bir alt modülüdür.

Yukarıdaki önermede  $I$  idealini bir  $a \in R$  için  $I = Ra = (a)$  şeklinde alırsak,  $IN = RaN = (a)N$  ifadeleri yerine basitçe  $aN$  yazabiliriz. Buna göre  $aN = \{a \cdot \mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in N\}$  olur.

**Örnek :**

Aşağıdaki kümelerin her biri, belirtilen modüllerin bir alt modülüdür.

1. Herhangi bir  $\mathbb{F}$  cismi ve  $\mathbb{F}$  üzerinde tanımlı  $\mathcal{V}$  vektör uzayı için,  $\mathcal{V}$ 'nin herhangi bir alt uzayı  $\mathcal{V}$ 'nin bir  $\mathbb{F}$ -alt modülüdür.
2. Herhangi bir  $R$  halkası için,  $R$ 'nin herhangi bir ideali  $R$ 'nin bir  $R$ -alt modülüdür. Tersine,  $R$ 'nin herhangi bir  $R$ -alt modülü de  $R$ 'nin bir idealidir.
3. Herhangi bir  $R$  halkası ve  $n \in \mathbb{N}^+$  için,

$$N = \{(r_1, r_2, \dots, r_n) \in R^n \mid r_1 + r_2 + \dots + r_n = 0\}$$

kümesi  $R^n$ 'in bir  $R$ -alt modülüdür.

**Tanım 2.5: Alt Modül Toplamı**

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N_1, N_2 \leq M$  alt modüller olsun.  $N_1$  ve  $N_2$ 'nin toplamı

$$N_1 + N_2 = \{\mathbf{x} + \mathbf{y} \mid \mathbf{x} \in N_1, \mathbf{y} \in N_2\}$$

kümesi olarak tanımlanır.

**Teorem 2.6**

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N_1, N_2 \leq M$  alt modüller olsun. Buna göre  $N_1 \cap N_2$  ve  $N_1 + N_2$  kümeleri  $M$ 'nin alt modülleridir. Ek olarak  $N_1 \cap N_2 \leq N_i$  ve  $N_i \leq N_1 + N_2$  ( $i = 1, 2$ ) dir.

**Not.**

Alt modül toplamı tümevarım yardımıyla ikiden fazla alt modülün toplamına genişletilebilir. Yani  $M$ 'nin  $k \geq 2$  tane  $N_1, N_2, \dots, N_k$  alt modülü için

$N_1 + N_2 + \dots + N_k = \{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \dots + \mathbf{x}_k \mid \mathbf{x}_i \in N_i, 1 \leq i \leq k\}$  kümesi de  $M$ 'nin bir alt modülüdür ve her  $1 \leq j < k$  için

$$(N_1 + \dots + N_j) + (N_{j+1} + \dots + N_k) = N_1 + N_2 + \dots + N_k$$

eşitliği sağlanır.

Bir  $M$  modülünün tüm alt modüllerinin kümesini,  $\mathcal{S}(M) = \{N \mid N \leq M\}$  ile gösterelim. Buna göre  $\mathcal{S}(M)$  kümesi kapsama bağıtına göre bir kısmi sıralı kümedir. Ayrıca,  $\mathcal{S}(M)$  kümesi üzerinde her  $K, L \in \mathcal{S}(M)$  için

$$K \wedge L = K \cap L \quad \text{ve} \quad K \vee L = K + L$$

işlemleri tanımlanırsa  $\mathcal{S}(M)$  kümesi yalnızca bir kısmi sıralı küme olmaktan öteye geçer ve bir *kafes (latis)* olur. Bu nedenle  $\mathcal{S}(M)$  kümesine  $M$ 'nin *alt modül kafesi* denir.

### 3 Üreteç Kümeleri ve Sonlu Üretilmiş Modüller

#### Teorem 3.1

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $S \subseteq M$  boş olmayan bir küme olsun. Buna göre

$$\langle S \rangle = \left\{ \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{s}_i \mid k \in \mathbb{N}, a_i \in R, \mathbf{s}_i \in S, 1 \leq i \leq k \right\}$$

kümesi  $M$ 'nin bir alt modülüdür. Bu alt modüle  $M$ 'nin  $S$  kümesi ile üretilen alt modülü denir. Eğer  $S = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m\}$  sonlu ise,  $\langle S \rangle = \{a_1 \cdot \mathbf{s}_1 + \dots + a_m \cdot \mathbf{s}_m \mid a_i \in R, 1 \leq i \leq m\}$  olur. Özel olarak, her  $\mathbf{m} \in M$  için  $\langle \{\mathbf{m}\} \rangle = \{r \cdot \mathbf{m} \mid r \in R\} =: R\mathbf{m}$  olur ve bu alt modüle  $m$ 'nin ürettiği *devirli* alt modül denir.

#### Kanıt.

Herhangi bir  $\mathbf{s} \in S$  için  $\mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{s} \in \langle S \rangle$  olduğundan  $S \neq \emptyset$  olur.

Şimdi  $\{a_1, \dots, a_k\}, \{b_1, \dots, b_l\} \subseteq R$  ve  $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_k\}, \{\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_l\} \subseteq M$  olmak üzere,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{s}_i \quad \text{ve} \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^l b_j \cdot \mathbf{t}_j$$

olsun.

$$a_{k+1} = b_1, a_{k+2} = b_2, \dots, a_{k+l} = b_l$$

ve

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{s}_{k+l} = \mathbf{t}_l$$

yazarsak,

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{s}_i + \sum_{j=1}^l b_j \cdot \mathbf{t}_j = \sum_{i=1}^{k+l} a_i \cdot \mathbf{s}_i \in \langle S \rangle$$

elde edilir. Benzer şekilde, her  $r \in R$  için

$$r \cdot \mathbf{x} = r \cdot \sum_{i=1}^k a_i \cdot \mathbf{s}_i = \sum_{i=1}^k (ra_i) \cdot \mathbf{s}_i \in \langle S \rangle$$

elde edilir. Böylece,  $\langle S \rangle$  kümesi  $M$ 'nin bir alt modülüdür.

Şimdi  $S = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m\}$  sonlu olsun. Herhangi  $a_1, \dots, a_m \in R$  elemanları için

$$a_1 \cdot \mathbf{s}_1 + \dots + a_m \cdot \mathbf{s}_m \in \langle S \rangle$$

olduğu tanımdan dolayı açıktır. Tersine, herhangi bir  $k \in \mathbb{N}$ ,  $b_1, \dots, b_k \in R$  ve  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in S$  için

$$\mathbf{x} = b_1 \cdot \mathbf{x}_1 + \dots + b_k \cdot \mathbf{x}_k \in \langle S \rangle$$

seçelim. Her  $1 \leq i \leq k$  için  $\mathbf{x}_i = \mathbf{s}_{j_i}$  olacak şekilde  $1 \leq j_i \leq m$  olan  $j_i$ 'ler vardır. Her  $1 \leq j \leq m$  için

$$B_j := \{b_i \mid 1 \leq i \leq k, \mathbf{x}_i = \mathbf{s}_j\}$$

kümesini tanımlayalım. Eğer  $B_j = \emptyset$  ise  $c_j = 0$  ve değilse  $c_j = \sum_{b \in B_j} b$  diyelim. O zaman

$$\mathbf{x} = c_1 \cdot \mathbf{s}_1 + \dots + c_m \cdot \mathbf{s}_m \in \{a_1 \cdot \mathbf{s}_1 + \dots + a_m \cdot \mathbf{s}_m \mid a_i \in R, 1 \leq i \leq m\}$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\langle S \rangle = \{a_1 \cdot \mathbf{s}_1 + \dots + a_m \cdot \mathbf{s}_m \mid a_i \in R, 1 \leq i \leq m\}$$

olur.

Son olarak,  $S = \{\mathbf{m}\}$  tek elemanlı ise,  $\langle S \rangle = \{a \cdot \mathbf{m} \mid a \in R\} =: R\mathbf{m}$  olur. ■

### Not.

Yukarıdaki teoremin kabulleri altında  $S = \{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m\}$  sonlu olduğunda,  $\langle S \rangle$  alt modülünü küme parantezi olmadan, basitçe,  $\langle \mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_m \rangle$  şeklinde de gösterebiliriz. Ayrıca,  $S = \{\mathbf{s}\}$  tek elemanlı olduğunda  $\langle S \rangle$  alt modülünü  $\langle \mathbf{s} \rangle$  şeklinde göstereceğiz.

**Sonuç 3.2**


$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \in M$  olsun. Buna göre

$$\langle \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k \rangle = \langle \mathbf{x}_1 \rangle + \dots + \langle \mathbf{x}_k \rangle = R\mathbf{x}_1 + \dots + R\mathbf{x}_k.$$

**Sonuç 3.3**

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $S \subseteq M$  olsun. Buna göre  $\langle S \rangle$ ,  $M$ 'nin  $S$  kümesini içeren tüm alt modüllerinin kesişimine eşittir. Böylece  $\langle S \rangle$ ,  $M$ 'nin  $S$  kümesini içeren en küçük alt modüldür.

**Kanıt.**

Okuyucuya bırakılmıştır. 

**Tanım 3.4**

$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.

1. Eğer bir  $S \subseteq M$  için  $M = \langle S \rangle$  ise,  $S$  kümesine  $M$ 'nin bir *üreteç kümesi* denir.
2. Eğer  $M$ 'nin sonlu bir üreteç kümesi varsa,  $M$ 'ye bir *sonlu üretilmiş modül*  $R$ -modül denir.
3. Eğer  $M$ 'nin tek elemanlı bir üreteç kümesi varsa,  $M$ 'ye bir *devirli modül* denir.
4.  $N \leq M$  ve  $N$ , bir  $R$ -modül olarak sonlu üretilmiş (devirli) ise,  $N$ 'ye  $M$ 'nin bir *sonlu üretilmiş alt modülü* (devirli alt modülü) denir.

## 4 Bölüm Modülü

$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $N \leq M$  olsun. Özel olarak  $(N, +)$  grubu  $(M, +)$  grubunun bir (normal) alt grubu olduğundan,  $M/N$  toplamsal abelyan grubu tanımlıdır. Şimdi  $M/N$  üzerinde  $R$ -modül yapısı tanımlayarak  $M/N$ 'yi bir  $R$ -modül yapacağız. Bunun için, her  $a \in R$  ve  $\mathbf{x} + N \in M/N$  için


$$a \cdot (\mathbf{x} + N) = a \cdot \mathbf{x} + N$$

çarpımını tanımlayalım. Kolayca görülebilir ki, bu çarpma işlemi iyi tanımlıdır ve bu işlemle birlikte  $M/N$  bir  $R$ -modül yapısına sahiptir. Bu modüle  $M$ 'nin  $N$  ile *bölüm modülü* denir.

**Önerme 4.1**

$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $M$  bir sonlu üretilmiş  $R$ -modül ise her  $N \leq M$  alt modülü için,  $M/N$  de bir sonlu üretilmiş  $R$ -modüldür.

*Kanıt.*

Okuyucuya bırakılmıştır. 

**Teorem 4.2: Alt modül eşleme teoremi**

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  bir alt modül olsun.

- (i)  $N \leq L \leq M$  ise  $L/N \leq M/N$  dir.
- (ii)  $\mathcal{K} \leq M/N$  ise  $K = \{m \in M \mid m + N \in \mathcal{K}\}$  kümesi  $M$ 'nin bir alt modülüdür ve  $N \leq K$  dir.
- (iii)  $\varphi : \Omega = \{L \in \mathcal{S}(M) \mid N \subseteq L\} \rightarrow \mathcal{S}(M/N)$ , her  $L \in \Omega$  için  $\varphi(L) = L/N$  dönüşümü bir kafes izomorfizmasıdır. Yani  $\varphi$  birebir ve örten olup, her  $L_1, L_2 \in \Omega$  için

$$\varphi(L_1 \wedge L_2) = \varphi(L_1) \wedge \varphi(L_2) \quad \text{ve} \quad \varphi(L_1 \vee L_2) = \varphi(L_1) \vee \varphi(L_2)$$

eşitlikleri sağlanır.

**Teorem 4.3**

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  bir alt modül olsun. Buna göre her  $K, L \leq M$  alt modülü ile  $R$ 'nin her  $I$  ideali için aşağıdakiler sağlanır:

- (i)  $(K/N) + (L/N) = (K + L)/N$  dir.
- (ii)  $(K/N) \cap (L/N) = (K \cap L)/N$  dir.
- (iii)  $I(K/N) = (IK + N)/N$  dir.

*Kanıt.*

Okuyucuya bırakılmıştır.

## 5 Doğrusal Bağımsızlık, Taban ve Serbest Modül


### Tanım 5.1: Doğrusal Bağımsızlık

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $S \subseteq M$  boş olmayan bir küme olsun. Eğer her  $k \in \mathbb{N}$ ,  $a_1, \dots, a_k \in R$  ve  $s_1, \dots, s_k \in S$  için

$$\sum_{i=1}^k a_i \cdot s_i = \mathbf{0} \implies a_i = 0, 1 \leq i \leq k$$

oluyorsa  $S$  kümesine  $M$ 'de *doğrusal bağımsız* denir.

Modüller üzerindeki doğrusal bağımsızlık kavramı, vektör uzaylarındakiyle tamamen aynı şekilde tanımlansa bile iki kavram arasında bazı önemli farklılıklar vardır. Bunları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:

- 1 Bir modülün minimal üreteç kümesi her zaman doğrusal bağımsız olmak zorunda değildir. Bunun en basit örneği,  $\mathbb{Z}$  üzerinde tanımlı  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  modülüdür.  $\{\bar{1}\}$  kümesi  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  nin bir minimal üreteç kümesidir. Ancak,  $2 \cdot \bar{1} = \bar{0}$  olduğundan  $\{\bar{1}\}$  kümesi doğrusal bağımsız değildir.
- 2 Bir modülün maksimal doğrusal bağımsız alt kümesi her zaman üreteç kümesi olmak zorunda değildir. Örneğin,  $\mathbb{Z}$  üzerinde tanımlı  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 'nin  $\{(2, 0), (0, 3)\}$  alt kümesi bir maksimal doğrusal bağımsız alt kümesidir. (Neden? ) Ancak,  $\langle (2, 0), (0, 3) \rangle \neq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  dir.
- 3 Bir modülün doğrusal bağımsız üreteç kümesi her zaman var olmayabilir. Örneğin,  $\mathbb{Z}$  üzerinde tanımlı  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  modülünün tek üreteç kümesi olan  $\{\bar{1}\}$  kümesi doğrusal bağımsız değildir.
- 4 Doğrusal bağımlı elemanlar birbirlerinin doğrusal kombinasyonu olmak zorunda değildir. Örneğin,  $3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 0$  olduğundan  $2, 3 \in \mathbb{Z}$  doğrusal bağımlıdır. Ancak, 2 sayısı 3'ün ve 3 sayısı da 2'nin doğrusal kombinasyonu değildir.

### Tanım 5.2: Taban ve Serbest Modül

$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $M$ 'nin doğrusal bağımsız bir üreteç kümesi varsa, bu kümeye  $M$ 'nin bir *tabanı* denir. Eğer  $M$ 'nin bir tabanı varsa,  $M$ 'ye bir *serbest modül* diyeceğiz.

Yukarıdaki (3) maddesinde de söylendiği gibi her modül serbest modül olmayabilir. Üzerindeki her modülün serbest modül olduğu halkalar ise oldukça özeldir. Bu tür halkalara literatürde *yarı-basit halkalar* denir. Yarı-basit değişmeli halkalar cisimlerin Kartezyen çarpımı şeklinde ifade edilebilen halkalardır.

## 6 Torsiyon Elemanı ve Torsiyonsuz Eleman

Doğrusal bağımsızlık ile ilgili önceki bölümde bahsedilen farklılıklar, modüller üzerinde çalışma açısından bazı zorluklar ortaya çıkarır. Ancak, bu zorluklar, modüller üzerindeki çalışmaların daha zengin ve çeşitli olmasını sağlar. Halkaların sınıflandırılmasında modüllerin bu zengin ve çeşitli özellikleri epey kullanışlıdır. Bu bağlamda, iki yön ele alınabilir: üzerindeki modüllerin vektör uzayından mümkün olduğunca farklı olabildiği halkalar ve modülleri vektör uzayına mümkün olduğunca benzeyebildiği halkalar. Modüller üzerindeki doğrusal bağımsızlık kavramı, bu tür araştırmalarda kullanılabilecek bir ölçüt sağlar.

Dikkat edilirse önceki bölümde (1) ve (3) maddeleri ile verilen farklılıklar biraz ucuza kaçmaktadır. Çünkü her iki maddede de sıfırdan farklı bir skalerle çarpımın sıfır sonucu vermesi durumu söz konusudur –ki böyle bir durum vektör uzaylarında sıfırdan farklı bir vektör için asla mümkün değildir. Bu nedenle, modüller üzerindeki doğrusal bağımsızlık kavramını ele alırken sıfırdan farklı skalerlerle çarpımların sıfır sonucu vermediği modüller üzerinde çalışmak daha uygun olabilir. Bu tür modüllere *torsiyonsuz modüller* denir. Aslında torsiyonsuzluk elemanlar üzerinde tanımlanarak da ifade eilebilir. Buna göre  $R$  halkası üzerindeki bir  $M$  modülünün sıfırdan farklı bir  $m \in M$  elemanı için eğer  $r \cdot m = 0 \implies r = 0$  ise bu  $m$  elemanına  $M$ 'nin bir *torsiyonsuz (torsion-free) elemanı* denir. Eğer  $M$ 'nin sıfırdan farklı tüm elemanları torsiyonsuz ise  $M$  modülüne *torsiyonsuz modül* denir. Eğer bir eleman  $M$  modülünün torsiyonsuz elemanı değilse, bu elemana  $M$ 'nin bir *torsiyon (torsion) elemanı* denir.  $M$ 'nin tüm torsiyon elemanlarının kümesine  $M$ 'nin *torsiyon alt modülü* denir ve  $\text{Tor}(M)$  ile gösterilir.  $R$  bir tamlık bölgesi ise o zaman  $\text{Tor}(M) \leq M$  ve  $M/\text{Tor}(M)$  bir torsiyonsuz  $R$ -modüldür. (Gösteriniz.) Eğer  $\text{Tor}(M) = M$  ise  $M$  modülüne bir *torsiyon modülü* denir.

## 7 Sıfırlayan İdealler

Torsiyon elemanları kendileri ile çarpılınca sıfır olan skalerler tarafından *sıfırlanırlar*. Bu nedenle, bir modülün torsiyon elemanlarını anlayabilmek için, modül elemanlarını sıfırlayan skalerleri incelemek faydalı olabilmektedir. Bu tür skalerler bir ideal oluştururlar ve bu ideal modülün yapısı hakkında bilgi verme potansiyeline sahiptir. Bu nedenle, bu tür ideallere *sıfırlayan idealler* denir. Üstelik cisimler idealleri bakımından oldukça fakir olduğundan, sıfırlayan idealleri düşünmek, halkalar üzerindeki modülleri, cisimler üzerindeki vektör uzaylarından ayıran özellikleri ortaya çıkarmak açısından doğal bir yol sunar.

### Tanım 7.1: Sıfırlayan İdeal

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $\mathbf{m} \in M$  olsun.  $\mathbf{m}$  elemanını sıfırlayan skalerlerin kümesi

$$\mathbf{m}^\# = \{r \in R \mid r \cdot \mathbf{m} = \mathbf{0}\}$$

olarak tanımlansın.  $\mathbf{m}^\#$  kümesine  $\mathbf{m}$ 'nin  $R$  içindeki *sıfırlayanı* denir.

$N \leq M$  için

$$N^\# = \{r \in R \mid \text{her } n \in N \text{ için } r \cdot n = 0\}$$

kümesine  $N$ 'nin  $R$  içindeki *sıfırlayanı* denir.

Kolayca görülebilir ki  $\mathbf{m}^\#$  ve  $N^\#$  kümeleri  $R$ 'nin idealleridir. Ayrıca,  $\mathbf{0}^\# = R$  dir. Ayrıca  $M$ 'nin  $A$  ve  $B$  alt modülleri için

- $A \subseteq B$  ise  $B^\# \subseteq A^\#$ ,
- $(A + B)^\# = A^\# \cap B^\#$

olur. Öte yandan her  $m \in M$  için  $m$  bir torsiyon elemanıdır ancak ve ancak  $m^\# \neq 0$  dir.

### Önerme 7.2

$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun.  $I$ ,  $R$ 'nin bir ideali olmak üzere  $I \subseteq M^\#$  olsun. Bu durumda  $M$  bir  $R/I$ -modül yapısına sahiptir ve  $M$ 'nin  $R$ -modül olarak alt modülleri ile  $R/I$ -modül olarak alt modülleri aynıdır.

Özel olarak,  $M$  bir  $R/M^\#$ -modüldür.

**Kanıt.**

$M$  bir modül olduğundan özel olarak bir toplamsal abelyan gruptur.  $R/I$  üzerinde  $M$ 'ye aşağıdaki gibi bir skalerle çarpma işlemi tanımlayalım:

$$(a + I) \cdot m = a \cdot m$$

Her  $a + I \in R/I$  ve  $m \in M$  için bu işlem iyi tanımlıdır. Çünkü,  $a + I = b + I$  ise  $a - b \in I \subseteq M^\#$  olduğundan

$$(a - b) \cdot m = 0 \implies a \cdot m = b \cdot m$$

olur. Diğer özellikler  $M$ 'nin  $R$ -modül yapısını belirleyen skalerle çarpma işleminin  $R/I$  üzerinde yukarıdaki gibi tanımlanan skalerle çarpma işlemi ile aynı olması nedeniyle sağlanır. Böylece  $M$  bir  $R/I$ -modül yapısına sahiptir. Skalerle çarpma işlemleri aynı olduğundan  $M$ 'nin  $R$ -modül olarak alt modülleri ile  $R/I$ -modül olarak alt modülleri aynıdır. ■

## 8 Modül Homomorfizmaları

$R$  bir halka ve  $M, N$  iki  $R$ -modül olsun.  $M$ 'den  $N$ 'ye bir fonksiyonun modül homomorfizması olabilmesi için, bu fonksiyonun  $M$ 'deki işlemleri  $N$ 'deki işlemlere taşıması gerekir. Buna göre,

### Tanım 8.1

$R$  bir halka,  $M, N$  iki  $R$ -modül ve  $f : M \rightarrow N$  bir fonksiyon olsun. Eğer her  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in M$  ve  $a \in R$  için

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$$

$$f(a \cdot \mathbf{x}) = a \cdot f(\mathbf{x})$$

oluyorsa,  $f$  fonksiyonuna  $M$ 'den  $N$ 'ye bir *modül homomorfizması* denir.

Eğer

- $f$  birebir ise,  $f$ 'ye bir *monomorfizma*,
- $f$  örten ise,  $f$ 'ye bir *epimorfizma*,
- $f$  hem birebir hem de örten ise,  $f$ 'ye bir *izomorfizma*

denir. Eğer bir  $M$ 'den  $N$ 'ye bir modül izomorfizması varsa,  $M$  ve  $N$ 'ye *izomorf* modüller denir ve  $M \cong N$  ile gösterilir.

Yukarıdaki tanıma göre bir modül homomorfizması hem bir toplamsal grup homomorfizmasıdır hem de doğrusaldır. Bu bakımdan vektör uzayları arasındaki lineer dönüşümlerle oldukça benzerdir. Aşağıdaki sonuç, bu benzerliği biraz daha pekiştirir niteliktedir.

### Önerme 8.2

$R$  bir halka,  $M, N$  iki  $R$ -modül ve  $f : M \rightarrow N$  bir modül homomorfizması olsun. Buna göre

- (i)  $f(\mathbf{0}_M) = \mathbf{0}_N$ ,
- (ii)  $f(-\mathbf{x}) = -f(\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in M$ ,
- (iii)  $\ker(f) = \{\mathbf{x} \in M \mid f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \leq M$ ,
- (iv)  $\text{Im}(f) = \{f(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in M\} \leq N$ .

**Kanıt.**

Okuyucuya bırakılmıştır. ■

$M$  bir modül ve  $K \leq M$  ise  $g : M \rightarrow M/K$ ,  $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + K$  fonksiyonu, çekirdeği  $\ker(g) = K$  olan bir modül epifizmasıdır. Bu epimorfizmaya  $M$ 'den  $M/K$ 'ye *doğal epimorfizma* denir.

## 9 İzomorfizma Teoremleri

Aşağıdaki teoremler grup homomorfizmaları ile lineer dönüşümler için verilen izomorfizma teoremlerinin modüller için olan halidir.

### Teorem 9.1: 1. İzomorfizma Teoremi

$R$  bir halka,  $M, N$  iki  $R$ -modül ve  $f : M \rightarrow N$  bir modül homomorfizması olsun. Buna göre

$$M/\ker(f) \cong \text{Im}(f)$$

olur.

### Teorem 9.2: 2. İzomorfizma Teoremi

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $A, B \leq M$  alt modüller olsun. Buna göre

$$(A + B)/B \cong A/(A \cap B)$$

olur.

### Teorem 9.3: 3. İzomorfizma Teoremi

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $N \leq M$  bir alt modül olsun. Eğer  $K \leq M$  ve  $N \subseteq K$  ise

$$(M/N)/(K/N) \cong M/K$$

olur.

## 10 Dik Toplamlar

Vektör uzaylarında olduğu gibi modüllerde de dik toplam kavramı tanımlanabilir. Bunun için, öncelikle,  $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$  gibi bir  $R$ -modül ailesi verildiğinde, bu modüllerin Kartezyen çarpımı olan

$$\prod_{\alpha \in A} M_\alpha = \{(m_\alpha)_{\alpha \in A} \mid m_\alpha \in M_\alpha, \forall \alpha \in A\}$$

kümesinin bir  $R$ -modül yapısına sahip olduğunu belirtmekte fayda vardır. Bu modül yapısı, Kartezyen çarpım üzerinde aşağıdaki gibi bileşensel olarak tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemi

ile verilir:

$$(m_\alpha)_{\alpha \in A}, (n_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} M_\alpha \text{ ve } r \in R \text{ için}$$

$$(m_\alpha)_{\alpha \in A} + (n_\alpha)_{\alpha \in A} = (m_\alpha + n_\alpha)_{\alpha \in A},$$

$$r \cdot (m_\alpha)_{\alpha \in A} = (r \cdot m_\alpha)_{\alpha \in A}.$$

Şimdi,  $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$   $R$ -modül ailesi için  $\prod_{\alpha \in A} M_\alpha$  *alpha* Kartezyen çarpım kümesinin alt kümesi olan

$$\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha = \left\{ (m_\alpha)_{\alpha \in A} \in \prod_{\alpha \in A} M_\alpha \mid \text{yalnız sonlu sayıdaki } \alpha \in A \text{ hariç tüm } \alpha \in A \text{ için } m_\alpha = 0 \right\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu küme, Kartezyen çarpım üzerindeki toplama ve skalerle çarpma işlemi ile bir  $R$ -modül yapısına sahiptir. Bu modüle  $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$  modül ailesinin (dış) *dik toplamı* denir.

$$\text{Her } \beta \in A \text{ için } \iota_\beta : M_\beta \rightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha,$$

$$\iota_\beta(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_\alpha) = \begin{cases} \mathbf{x}, & \alpha = \beta \text{ ise} \\ 0, & \alpha \neq \beta \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı dönüşüm bir monomorfizmadır. Bu dönüşüme  $M_\beta$ 'nin  $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$  içine doğal *gömülmesi* denir.

Vektör uzaylarında olduğu gibi modüllerde de dik toplamlar evrensel bir özellik sağlar.


### Teorem 10.1: Dik Toplamın Evrensel Özelliği

$R$  bir halka,  $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$  bir  $R$ -modül ailesi ve  $N$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer her  $\beta \in A$  için  $f_\beta : M_\beta \rightarrow N$  bir modül homomorfizması ise, o zaman

$$\begin{array}{ccc} M_\beta & \xrightarrow{\iota_\beta} & \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \\ & \searrow f_\beta & \nearrow f \\ & & N \end{array}$$

diagramını değişmeli yapan (yani  $f \circ \iota_\beta = f_\beta$  eşitliğini sağlayan) tek türlü belirli  $f : \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha \rightarrow N$  modül homomorfizması vardır.

**Kanıt.**

Okuyucuya bırakılmıştır. 

$\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$  bir modül ailesi olsun. Her  $\beta \in A$  için  $M_\beta$ 'nin  $\bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$  içindeki doğal gömülmesini  $M'_\beta$  ile gösterelim. O zaman:


$$\text{D1} \quad \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha = \sum_{\alpha \in A} M'_\alpha,$$

$$\text{D2} \quad \text{her } \beta \in A \text{ için } M'_\beta \cap \sum_{\alpha \in A \setminus \{\beta\}} M'_\alpha = 0$$

olur.

$M$  bir  $R$ -modül olsun. Eğer  $M$ 'nin (D1) ve (D2) özelliklerine sahip bir  $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$  alt modül ailesi varsa  $M$ 'ye  $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$  modül ailesinin (iç) dik toplamı denir ve

$$M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$$

yazılır. Buna göre her dış dik toplam aynı zamanda bir iç dik toplam olur. Tersine, her iç dik toplam da bir dış dik toplama izomorf olur. (Nedenini düşününüz. )

### Teorem 10.2

$M$  bir  $R$ -modül ve  $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ,  $M$ 'nin bir alt modüllerinin bir ailesi olsun. Buna göre aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i) Her  $\beta \in A$  için  $M_\beta \cap \left( \bigoplus_{\alpha \in A \setminus \{\beta\}} M_\alpha \right) = \{0\}$ .
- (ii) Seçilen her  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$  ve en az biri sıfırdan farklı  $\mathbf{x}_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) elemanları için  $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{\alpha_i} \neq 0$ .
- (iii) Her sıfırdan farklı  $\mathbf{x} \in \sum_{\alpha \in A} M_\alpha$  için,  $\mathbf{x} = \sum_{\alpha \in A} \mathbf{x}_\alpha$  olacak şekilde yalnızca sonlu sayıda sıfırdan farklı tek türlü belirli  $\mathbf{x}_\alpha \in M_\alpha$  elemanları vardır.

**Kanıt.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) :  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$  ve en az biri sıfırdan farklı  $\mathbf{x}_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) elemanları için  $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{\alpha_i} = 0$  olsun. Genelliği bozmadan kabul edelim ki  $\mathbf{x}_{\alpha_1} \neq 0$  olsun. Fakat,  $\mathbf{x}_{\alpha_1} = -\mathbf{x}_{\alpha_2} - \dots - \mathbf{x}_{\alpha_n} \in M_{\alpha_1} \cap \left( \bigoplus_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_1\}} M_\alpha \right) \cap \{0\}$  olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla,  $\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{\alpha_i} \neq 0$  olmalıdır.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) :  $\mathbf{x} \in \sum_{\alpha \in A} M_\alpha$  olsun. O zaman  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\alpha_1} + \dots + \mathbf{x}_{\alpha_n}$  olacak şekilde  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in A$  ve  $\mathbf{x}_{\alpha_i} \in M_{\alpha_i}$  ( $1 \leq i \leq n$ ) elemanları vardır. Eğer  $\mathbf{x} = \mathbf{y}_{\beta_1} + \dots + \mathbf{y}_{\beta_m}$  olacak şekilde  $\beta_1, \dots, \beta_m \in A$  ve  $\mathbf{y}_{\beta_j} \in M_{\beta_j}$  ( $1 \leq j \leq m$ ) elemanları da varsa, o zaman  $\mathbf{x}_{\alpha_1} + \dots + \mathbf{x}_{\alpha_n} - \mathbf{y}_{\beta_1} - \dots - \mathbf{y}_{\beta_m} = 0$  olur. Burada, bazı  $\alpha_i$ 'ler ile  $\beta_j$ 'lerin birbirinden farklı olabileceğini dikkate alalım. Fakat, (ii) maddesi gereğince bu durumdaki tüm  $\mathbf{x}_{\alpha_i}$  ve  $\mathbf{y}_{\beta_j}$  elemanlarının sıfır olması gerekir. Geri kalan elemanlar ise  $\alpha_i = \beta_j$  olacak şekilde  $\mathbf{x}_{\alpha_i} - \mathbf{y}_{\beta_j}$  olarak gruplanabilir. Bunlar ise (ii) gereğince sıfır olacağından, (iii) maddesi sağlanır.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) :  $\beta \in A$  ve  $\mathbf{x} \in M_\beta \cap \left( \bigoplus_{\alpha \in A \setminus \{\beta\}} M_\alpha \right)$  olsun.  $\mathbf{x} \in \bigoplus_{\alpha \in A \setminus \{\beta\}} M_\alpha$  olduğundan  $\mathbf{x}_\beta = \mathbf{x} = \sum_{\alpha \in A \setminus \{\beta\}} \mathbf{x}_\alpha$  olacak şekilde yalnızca sonlu sayıda sıfırdan farklı  $\mathbf{x}_\alpha \in M_\alpha$  elemanları vardır.  $\mathbf{x} \neq 0$  olması (iii) ile kabul edilen tek türlü yazım ilkesine aykırı olacağından,  $\mathbf{x} = 0$  olmak

zorundadır. ■

### Tanım 10.3

$M$  bir  $R$ -modül ve  $\{M_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ,  $M$ 'nin bir alt modüllerinin bir ailesi olmak üzere

$$M = \bigoplus_{\alpha \in A} M_\alpha$$

olsun.  $x \in M$  için  $\mathbf{x} = \sum_{\alpha \in A} \mathbf{x}_\alpha$  olacak şekildeki tek türlü belirli en fazla sonlu tanesi sıfırdan farklı  $\mathbf{x}_\alpha \in M_\alpha$  elemanlarına  $x$ 'in *bileşenleri* denir. Özel olarak,  $x$ 'in  $M_\beta$ 'daki bileşenine  $x$ 'in  $\beta$ -bileşeni denir.

### Teorem 10.4

$M$  bir modül ve  $A, B \leq M$  için  $M = A \oplus B$  olsun. O zaman  $A \cong M/B$  ve  $B \cong M/A$  dir.

*Kanıt.*

Okuyucuya bırakılmıştır. ? ■

### Teorem 10.5

$f : M \rightarrow N$  bir modül homomorfizması olsun.

- (i) Eğer  $g \circ f = 1_M$  olacak şekilde bir  $g : N \rightarrow M$  homomorfizması varsa, o zaman  $N = \text{Im}(f) \oplus \ker(g)$  ve  $M \cong \text{Im}(f)$  dir.
- (ii) Eğer  $f \circ h = 1_N$  olacak şekilde bir  $h : N \rightarrow M$  homomorfizması varsa, o zaman  $M = \text{Im}(h) \oplus \ker(f)$  ve  $N \cong \text{Im}(h)$  dir.

*Kanıt.*

(i)  $g \circ f = 1_M$  olduğundan  $f$  bir monomorfizma ve  $g$  bir epimorfizmadır. O zaman  $f : M \rightarrow \text{Im}(f)$  bir izomorfizma olduğundan  $M \cong \text{Im}(f)$  dir. Her  $\mathbf{y} \in N$  için  $\mathbf{y} = [\mathbf{y} - f(g(\mathbf{y}))] + f(g(\mathbf{y}))$  ve  $\mathbf{y} - f(g(\mathbf{y})) \in \ker(g)$  olduğundan  $N = \text{Im}(f) + \ker(g)$  dir. Eğer  $\mathbf{y} \in \text{Im}(f) \cap \ker(g)$  ise  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$  olacak şekilde  $\mathbf{x} \in M$  vardır. Fakat,  $\mathbf{0} = g(\mathbf{y}) = g(f(\mathbf{x})) = \mathbf{x}$  olduğundan  $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  olur. Dolayısıyla,  $\text{Im}(f) \cap \ker(g) = \mathbf{0}$  dir.

(ii) Benzer şekilde gösterilir. ■

**Teorem 10.6**

$R$  bir halka ve  $f : M \rightarrow F$  bir  $R$ -modül epimorfizması olsun. Eğer  $F$  serbest bir  $R$ -modül ise, o zaman  $f$ 'nin bir sağ tersi vardır. Başka bir deyişle,  $M = \ker(f) \oplus X$  olacak şekilde bir  $X \leq M$  alt modülü vardır ve  $X \cong F$ 'dir.

**Kanıt.**

$F$ 'nin bir tabanı  $\mathcal{B}$  olsun.  $f$ 'nin bir sağ tersi  $g : F \rightarrow M$  dönüşümünü tanımlayalım.  $f$  örten olduğundan, her  $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$  için  $f(\mathbf{m}_b) = \mathbf{b}$  eşitliğini sağlayan en az bir  $\mathbf{m}_b \in M$  elemanı vardır. O zaman

$$\begin{aligned} g : F &\longrightarrow M \\ \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{b}_i &\longmapsto \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{m}_{b_i} \end{aligned}$$

dönüşümü  $f$ 'nin bir sağ tersi olur. Böylece, Teorem 10.5 gereğince  $M = \ker(f) \oplus \text{Im}(g)$  ve  $\text{Im}(g) \cong F$  olur. ■

**Teorem 10.7**

$R$  bir halka,  $M$  bir  $R$ -modül ve  $\{H_\alpha \mid \alpha \in A\}$ ,  $M$ 'nin alt modüllerinin bir ailesi olmak üzere  $M = \bigoplus_{\alpha \in A} H_\alpha$  olsun.  $\beta \in A$  için her  $\mathbf{x} \in M$  elemanını,  $\mathbf{x}$ 'in  $\beta$ -bileşenine götüren  $\pi_\beta : M \rightarrow H_\beta$ ,  $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x}_\beta$  dönüşümü bir modül epimorfizmasıdır. Ayrıca her  $\alpha_i \in A$  için  $\iota_{\alpha_i} : H_{\alpha_i} \rightarrow M$  doğal gömme dönüşümü bir modül monomorfizmasıdır ve

$$(i) \ker(\pi_{\alpha_i}) = \bigoplus_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_i\}} H_\alpha$$

$$(ii) \pi_\beta \circ \iota_\beta = 1_{H_\beta},$$

$$(iii) \pi_\alpha \circ \iota_\beta = 0, \alpha \neq \beta$$

özellikleri sağlanır.

Ek olarak,  $A = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  ise o zaman

$$(iv) 1_M = \sum_{i=1}^n \iota_{\alpha_i} \circ \pi_{\alpha_i},$$

olur.

**Kanıt.**

(i)  $\mathbf{x} \in \ker(\pi_{\alpha_i})$  ise  $\mathbf{x}$ 'in  $\alpha_i$ -bileşeni  $\mathbf{x}_{\alpha_i} = 0$  dir. O zaman  $\mathbf{x} \in \bigoplus_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_i\}} H_\alpha$  olur. Tersine,  $\mathbf{x} \in \bigoplus_{\alpha \in A \setminus \{\alpha_i\}} H_\alpha$  ise  $\mathbf{x}$ 'in  $\alpha_i$ -bileşeni  $\mathbf{x}_{\alpha_i} = 0$  dir. O zaman  $\pi_{\alpha_i}(\mathbf{x}) = \mathbf{x}_{\alpha_i} = 0$  olduğundan  $\mathbf{x} \in \ker(\pi_{\alpha_i})$  olur. Böylece (i) elde edilir.

- (ii)  $\mathbf{x} \in H_\beta$  için  $\pi_\beta(\iota_\beta(\mathbf{x})) = \pi_\beta(x) = x$  olacağından istenen sonuç elde edilir.  
 (iii)  $\alpha \neq \beta$  ve  $\mathbf{x} \in H_\beta$  için  $\pi_\alpha(\iota_\beta(\mathbf{x})) = \pi_\alpha(\mathbf{x}) = 0$  olacağından istenen sonuç elde edilir.  
 (iv)  $\mathbf{x} \in M$  için  $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{\alpha_i}$  olacak şekildeki tek türlü belirli  $\mathbf{x}_{\alpha_i} \in H_{\alpha_i}$  elemanları için

$$\left( \sum_{i=1}^n \iota_{\alpha_i} \circ \pi_{\alpha_i} \right) (\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \iota_{\alpha_i} (\pi_{\alpha_i} (\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \iota_{\alpha_i} (\mathbf{x}_{\alpha_i}) = \sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{\alpha_i} = \mathbf{x}$$

elde edilir. Böylece (iv) de elde edilir. ■

## 11 Serbest Modüllerin Rankı

Aşağıdaki teorem serbest modüllerin rankının tanımı için gerekli zemini hazırlar.

### Teorem 11.1

$R$  bir halka ve  $F$  bir serbest  $R$ -modül olsun. Eğer  $F$ 'nin iki tabanı  $\mathcal{B}_1$  ve  $\mathcal{B}_2$  ise,  $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$  dir. Ayrıca  $F$ 'nin herhangi bir üreteç kümesinin kardinalitesi en az  $F$ 'nin tabanının kardinalitesi kadardır.

**Kanıt.**

$\mathcal{M}$ ,  $R$ 'nin bir maksimal ideali olsun. O zaman  $\mathbb{k} = R/\mathcal{M}$  bir cisim ve  $\overline{F} = F/\mathcal{M}F$  bir  $\mathbb{k}$ -vektör uzayıdır. (Nedenini düşününüz. ?) Öncelikle gösterelim ki  $F$ 'nin herhangi bir  $\mathcal{B}$  tabanı için

$$\mathcal{M}F = \left\{ \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{b}_i \mid m_i \in \mathcal{M}, \mathbf{b}_i \in \mathcal{B} \right\}$$

dir. Eşitliğin sağ tarafına  $Y$  diyelim.  $Y \subseteq \mathcal{M}F$  olduğu açıktır. Şimdi  $\mathbf{x} \in \mathcal{M}F$  olsun. O zaman  $\mathbf{x} = m_1 \mathbf{f}_1 + \cdots + m_k \mathbf{f}_k$  olacak şekilde  $m_i \in \mathcal{M}$  ve  $\mathbf{f}_i \in F$  elemanları vardır. Ayrıca her  $1 \leq i \leq k$  için  $\mathbf{f}_i = r_{i1} \mathbf{b}_{i1} + \cdots + r_{in_i} \mathbf{b}_{in_i}$  olacak şekilde  $r_{ij} \in R$  ve  $\mathbf{b}_{ij} \in \mathcal{B}$  elemanları vardır. Buna göre

$$\mathbf{x} = m_1 \left( \sum_{j=1}^{n_1} r_{1j} \mathbf{b}_{1j} \right) + \cdots + m_k \left( \sum_{j=1}^{n_k} r_{kj} \mathbf{b}_{kj} \right) = \sum_{j=1}^{\max(n_i)} \underbrace{\left( \sum_{i=1}^k m_i r_{ij} \right)}_{\in \mathcal{M}} \mathbf{b}_{ij}$$

olduğundan  $\mathbf{x} \in Y$  elde edilir. Dolayısıyla  $\mathcal{M}F = Y$  olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi her  $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$  için  $\mathbf{b} \notin \mathcal{M}F$  olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki bir  $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$  için  $\mathbf{b} \in \mathcal{M}F$  olsun. O zaman yukarıdaki eşitlikten  $\mathbf{b} = \sum_{i=1}^k m_i \mathbf{b}_i$  olacak şekilde  $m_i \in \mathcal{M}$  ve  $\mathbf{b}_i \in \mathcal{B}$  elemanları vardır.  $\mathcal{B}$  bir taban olduğundan  $\mathbf{b}$ 'nin  $\mathcal{B}$  üzerindeki tek türlü yazımı  $\mathbf{b} = 1 \cdot \mathbf{b} + 0 + \cdots + 0$  şeklindedir. Fakat bu durumda  $1 \in \mathcal{M}$  olur ki bu da  $\mathcal{M}$ 'nin maksimal ideal olması ile çelişir. Dolayısıyla, her  $\mathbf{b} \in \mathcal{B}$  için  $\mathbf{b} \notin \mathcal{M}F$  dir. Özel olarak  $\mathcal{M}F \neq F$  dir.

$\overline{F}$  uzayının

$$\overline{\mathcal{B}} = \{\mathbf{b} + \mathcal{M}F \mid \mathbf{b} \in \mathcal{B}\}$$

alt kümesini düşünelim.  $\overline{\mathcal{B}}$  kümesinin,  $\overline{F}$  uzayının bir tabanı olduğunu gösterelim. Öncelikle  $\overline{\mathcal{B}}$  kümesinin  $\overline{F}$ 'yi ürettiğini gösterelim. Her  $\mathbf{x} + \mathcal{M}F \in \overline{F}$  için  $\mathbf{x} \in F$  olduğundan  $\mathbf{x} = r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_k\mathbf{b}_k$  olacak şekilde  $r_i \in R$  ve  $\mathbf{b}_i \in \mathcal{B}$  elemanları vardır. O zaman

$$\mathbf{x} + \mathcal{M}F = (r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_k\mathbf{b}_k) + \mathcal{M}F = (r_1 + \mathcal{M})(\mathbf{b}_1 + \mathcal{M}F) + \cdots + (r_k + \mathcal{M})(\mathbf{b}_k + \mathcal{M}F)$$

olduğundan  $\overline{\mathcal{B}}$  kümesi  $\overline{F}$ 'yi üretir. Şimdi  $\overline{\mathcal{B}}$  kümesinin  $\overline{F}$ 'de lineer bağımsız olduğunu gösterelim.  $\mathbf{b}_1 + \mathcal{M}F, \dots, \mathbf{b}_n + \mathcal{M}F \in \overline{\mathcal{B}}$  ve  $r_1 + \mathcal{M}, \dots, r_n + \mathcal{M} \in \mathbb{k}$  için

$$(r_1 + \mathcal{M})(\mathbf{b}_1 + \mathcal{M}F) + \cdots + (r_n + \mathcal{M})(\mathbf{b}_n + \mathcal{M}F) = \mathcal{M}F$$

olsun. O zaman  $r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_n\mathbf{b}_n \in \mathcal{M}F$  olduğundan  $r_1\mathbf{b}_1 + \cdots + r_n\mathbf{b}_n = m_1\mathbf{b}'_1 + \cdots + m_k\mathbf{b}'_k$  olacak şekilde  $m_i \in \mathcal{M}$  ve  $\mathbf{b}'_i \in \mathcal{B}$  elemanları vardır.  $\mathcal{B}$  bir taban olduğundan bu durumda  $n = k$ ,  $\mathbf{b}_i = \mathbf{b}'_i$  ve  $r_i = m_i \in \mathcal{M}$  olur. Dolayısıyla, her  $1 \leq i \leq n$  için  $r_i + \mathcal{M} = \mathcal{M}$  olur. Böylece  $\overline{\mathcal{B}}$  kümesinin  $\overline{F}$ 'de lineer bağımsız olduğu gösterilmiş olur.

Sonuç olarak,  $\overline{\mathcal{B}}$  kümesi  $\overline{F}$ 'nin bir tabanıdır. O zaman  $|\overline{\mathcal{B}}| = \dim_{\mathbb{k}}(\overline{F})$  dir. Ayrıca,  $\overline{\mathcal{B}}$  kümesinin  $\mathcal{B}$  kümesi ile birebir eşleştiği de açıktır. Dolayısıyla,  $|\mathcal{B}| = |\overline{\mathcal{B}}| = \dim(\overline{F})$  olur. Bu durumda,  $F$ 'nin herhangi bir tabanının kardinalitesi  $\dim_{\mathbb{k}}(\overline{F})$ 'ye eşit olur.

$F$ 'nin herhangi bir üreteç kümesinin  $\overline{F}$  içindeki görüntüsünün  $\overline{F}$ 'yi ürettiğini yukarıdaki gibi tekniklerle gösterebiliriz. O zaman,  $\overline{F}$ 'nin herhangi bir üreteç kümesinin kardinalitesi en az  $\dim_{\mathbb{k}}(\overline{F})$  dir. Dolayısıyla,  $F$ 'nin herhangi bir üreteç kümesinin kardinalitesi en az  $F$ 'nin tabanının kardinalitesi kadardır. Böylece kanıt tamamlanmış olur. ■

## Tanım 11.2: Rank

$F$  bir serbest  $R$ -modül olsun.  $F$ 'nin herhangi bir tabanının kardinalitesine  $F$ 'nin *rankı* denir ve  $\text{rank}(F)$  ile gösterilir.

### Örnek :

$R$  bir halka ve  $\mathcal{B}$  boş olmayan bir küme olsun.  $R^{\mathcal{B}}$ ,  $\mathcal{B}$  kümesinden  $R$ 'ye tanımlı tüm fonksiyonların kümesini gösterebiliriz.  $f, g \in R^{\mathcal{B}}$  için  $(f + g) : \mathcal{B} \rightarrow R$  ve  $(r \cdot f) : \mathcal{B} \rightarrow R$  fonksiyonlarını sırasıyla

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(r \cdot f)(x) = r \cdot f(x)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu işlemler  $R^{\mathcal{B}}$  kümesine bir  $R$ -modül yapısı kazandırır.  $f \in R^{\mathcal{B}}$  ise

$$\text{Dest } f = \mathcal{B} \setminus f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathcal{B} \mid f(x) \neq 0\}$$

kümesine  $f$ 'nin desteği denir. Desteği sonlu olan  $R^{\mathcal{B}}$ 'nin bir elemanına *sonlu destekli* bir elemanı denir.  $R^{\mathcal{B}}$ 'nin sonlu destekli tüm elemanlarının kümesini  $R^{(\mathcal{B})}$  ile gösterelim. O zaman  $R^{(\mathcal{B})}$ ,  $R^{\mathcal{B}}$ 'nin bir alt modülüdür. Öte yandan  $R^{(\mathcal{B})}$  bir serbest  $R$ -modüldür ve  $\{\delta_x \mid x \in \mathcal{B}\}$  kümesi  $R^{(\mathcal{B})}$ 'nin bir tabanıdır. Burada,  $\delta_x : \mathcal{B} \rightarrow R$  fonksiyonu

$$\delta_x(y) = \begin{cases} 1, & y = x \\ 0, & y \neq x \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. Bunu görmek için bir  $f \in R^{(\mathcal{B})}$  elemanı alalım. O zaman  $f$ 'nin desteği sonlu olduğundan,  $\text{Dest } f = \{x_1, \dots, x_n\}$  şeklinde yazılabilir. Her  $1 \leq i \leq n$  için  $y_i = f(x_i) \in R$  olsun. O zaman  $f = y_1\delta_{x_1} + \dots + y_n\delta_{x_n}$  olur ve bu yazım her  $f \in R^{(\mathcal{B})}$  için tek türüdür. Böylece  $R^{(\mathcal{B})}$ , bir tabanı  $\{\delta_x \mid x \in \mathcal{B}\}$  kümesi olan bir serbest  $R$ -modül olur. Bu durumda,  $R^{(\mathcal{B})}$ 'nin rankı da  $|\mathcal{B}|$  olur. Ayrıca,  $R^{(\mathcal{B})}$ 'nin herhangi bir üreteç kümesinin kardinalitesi en az  $|\mathcal{B}|$ 'dir. ■

### Sonuç 11.3

$R$  bir (değişmeli) halka olsun.  $F$  bir serbest  $R$ -modül olsun. O zaman  $|X| = \text{rank}(F)$  olacak şekilde her  $X$  kümesi için  $F \cong R^{(X)}$  olur. Öte yandan  $X$  ve  $Y$  kümeleri için  $R^{(X)} \cong R^{(Y)}$  ancak ve ancak,  $|X| = |Y|$ 'dir.

**Kanıt.**

$F$ 'nin bir tabanı  $\mathcal{B}$  olsun. Buna göre

$$\begin{aligned} R^{(X)} &\longrightarrow F \\ f &\longmapsto \sum_{x \in X} f(x)x \end{aligned}$$

dönüşümü bir modül izomorfizmasıdır.

$R^{(X)} \cong R^{(Y)}$  ise  $\text{rank}(R^{(X)}) = \text{rank}(R^{(Y)})$  olduğundan  $|X| = |Y|$  olur. Tersine,  $|X| = |Y|$  ise  $R^{(X)}$  ve  $R^{(Y)}$ 'nin her ikisi de serbest modüller olup yukarıdaki paragrafta kanıtlanan sonuçtan dolayı  $R^{(X)} \cong R^{(Y)}$  olur. ■

### Sonuç 11.4

$R$  bir (değişmeli) halka olsun.  $R$  üzerindeki herhangi iki serbest modül  $F_1$  ve  $F_2$  için  $F_1 \cong F_2$  ancak ve ancak,  $\text{rank}(F_1) = \text{rank}(F_2)$ 'dir.

**Kanıt.**

$F_1$  ve  $F_2$ 'nin sırasıyla  $\mathcal{B}_1$  ve  $\mathcal{B}_2$  tabanları olsun. O zaman  $|\mathcal{B}_1| = \text{rank}(F_1)$  ve  $|\mathcal{B}_2| = \text{rank}(F_2)$  dir. Eğer  $F_1 \cong F_2$  ise  $\text{rank}(F_1) = \text{rank}(F_2)$  olur. Tersine,  $\text{rank}(F_1) = \text{rank}(F_2)$  ise  $|\mathcal{B}_1| = |\mathcal{B}_2|$

olur. Dolayısıyla,  $F_1 \cong R^{(B_1)} \cong R^{(B_2)} \cong F_2$  olur. ■

### Teorem 11.5

$R$  bir tamlık bölgesi ve  $F$  bir serbest  $R$ -modül olsun. O zaman  $F$ 'deki her lineer bağımsız kümenin kardinalitesi en fazla  $\text{rank}(F)$ 'dir.

**Kanıt.**

$\kappa = \text{rank}(F)$  olsun. O zaman  $F \cong R^{(\kappa)}$  olur. Dolayısıyla, teoremi göstermek için  $R^{(\kappa)}$ 'daki her lineer bağımsız kümenin kardinalitesinin en fazla  $\kappa$  olduğunu göstermek yeterlidir.  $S$  kümesi  $R^{(\kappa)}$ 'da bir lineer bağımsız küme olsun.  $Q$ ,  $R$ 'nin bir kesirler cismi olmak üzere  $Q^{(\kappa)}$  bir  $Q$ -uzayıdır ve  $R^{(\kappa)} \subseteq Q^{(\kappa)}$  yazılabilir.  $S \subseteq Q^{(\kappa)}$  ve  $S$ ,  $Q$  cismi üzerinde de lineer bağımsızdır. (Nedenini düşününüz. ?) Buna göre  $|S| \leq \dim_Q(Q^{(\kappa)})$  olur. Fakat,  $Q^{(\kappa)}$ , bir tabanı  $\{\delta_i \mid i < \kappa\}$  olan bir serbest  $Q$ -modül ve  $\dim_Q(Q^{(\kappa)}) = \text{rank}_Q(Q^{(\kappa)}) = \kappa$  olduğundan  $|S| \leq \kappa$  elde edilir. ■

### Teorem 11.6

$R$  bir halka ise her  $R$ -modül, serbest bir  $R$ -modülün homomorf görüntüsüdür.

**Kanıt.**

$M$  bir  $R$ -modül olsun.  $M$ 'nin bir üreteç kümesi  $\{m_i \mid i \in I\}$  olsun. O zaman  $F = R^{(I)}$  serbest  $R$ -modülünün  $\{\delta_i \mid i \in I\}$  tabanını kullanarak

$$\begin{aligned} f : F &\longrightarrow M \\ \delta_i &\longmapsto m_i \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Bu dönüşüm bir modül epimorfizmasıdır. Dolayısıyla;  $M$ ,  $F$ 'nin bir homomorf görüntüsüdür. ■

## 12 Noether Modüller: Artan Zincir Koşulu, Maksimallik Prensibi ve Alt Modüllerin Sonlu Üretilmişliği

$(\mathcal{P}, \preceq)$  bir kısmi sıralı küme olsun.  $\mathcal{P}$ 'nin bir *artan zinciri* (ascending chain) her  $i, j$  doğal sayısı için,  $i \leq j$  ise  $a_i \preceq a_j$  olacak şekildeki bir  $\{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$  kümesidir. Bir artan zinciri bazen

$$a_1 \preceq a_2 \preceq a_3 \preceq \cdots$$

şeklinde de ifade ederiz. Eğer  $\mathcal{P}$ 'deki her artan zincir maksimum elemana sahipse, o zaman  $\mathcal{P}$ 'de *artan zincir koşulu* (ascending chain condition) sağlanır denir. Bir  $a_1 \preceq a_2 \preceq a_3 \preceq \cdots$  artan zinciri verildiğinde, bu zincirin maksimum elemanı  $a_n$  ise, her  $i$  doğal sayısı için  $a_n = a_{n+i}$  olur. Bu durumda  $a_1 \preceq a_2 \preceq a_3 \preceq \cdots$  zinciri *duruyor* (stationary) denir. Buna göre  $\mathcal{P}$ 'de artan zincir koşulunun sağlanması,  $\mathcal{P}$ 'deki her artan zincirin durması ile de tanımlanabilir.

### Teorem 12.1

$(\mathcal{P}, \preceq)$  bir kısmi sıralı küme olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i)  $\mathcal{P}$ 'de artan zincir koşulu sağlanır.
- (ii)  $\mathcal{P}$ 'nin boştan farklı her alt kümesi bir maksimal elemana sahiptir.

**Kanıt.**

(i)  $\Rightarrow$  (ii) :  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}$  boştan farklı bir küme olsun.  $\mathcal{A}$ 'nın bir maksimal elemanı olmadığını varsayalım ve  $\mathcal{A}$ 'dan bir  $a_1 \in \mathcal{A}$  elemanı seçelim.  $a_1$  maksimal olmadığından,  $a_1 \prec a_2$  olacak şekilde bir  $a_2 \in \mathcal{A}$  vardır. (Burada,  $a \prec b$  ifadesi  $a \preceq b$  ve  $a \neq b$  anlamındadır.) Benzer şekilde,  $a_2$  maksimal olmadığından,  $a_2 \prec a_3$  olacak şekilde bir  $a_3 \in \mathcal{A}$  vardır. Bu işlemi sonsuza kadar sürdürebiliriz ve böylece  $\mathcal{P}$ 'de durmayan bir artan zincir elde ederiz ki bu da (i) kabulümüz ile çelişir. Dolayısıyla,  $\mathcal{A}$ 'nın bir maksimal elemanı vardır.

(ii)  $\Rightarrow$  (i) :  $\mathcal{P}$ 'de durmayan bir artan zincir olduğunu varsayalım. O zaman bu zincirin maksimal elemanı olamaz. (Bir zincir için maksimal ve maksimum eleman kavramları eşittir.) Bu ise (ii) kabulümüz ile çelişir. Böylece,  $\mathcal{P}$ 'deki her artan zincir durur. ■

Yukarıdaki teoremdeki (ii) koşuluna *maksimallik prensibi* (maximal principle) denir.

### Tanım 12.2: Noether Modülü

Bir  $R$ -modül  $M$ 'nin alt modüllerinin  $(\mathcal{S}(M), \subseteq)$  kısmi sıralı kümesi artan zincir koşulunu sağlıyorsa,  $M$ 'ye bir *Noether modülü* denir. Eğer  $R$ , kendisi üzerindeki standart modül yapısı ile bir Noether modül olursa,  $R$ 'ye bir *Noether halkası* denir. Başka bir deyişle, eğer  $R$ 'nin ideallerinin kısmi sıralı kümesi artan zincir koşulunu sağlıyorsa,  $R$  bir Noether halkasıdır.

**Örnek :**

$\mathbb{Z}$  bir Noether halkasıdır. Gerçekten,  $\mathbb{Z}$ 'nin tüm idealleri  $n\mathbb{Z}$  ( $n \geq 0$ ) şeklinde olduğundan,  $\mathbb{Z}$ 'nin ideallerinin herhangi bir artan zinciri

$$n_1\mathbb{Z} \subseteq n_2\mathbb{Z} \subseteq n_3\mathbb{Z} \subseteq \dots$$

şeklinde yazılabilir. Burada her bir  $n_i$ 'yi pozitif bir tam sayı olarak alabiliriz. Bu durumda,  $n_1 \geq n_2 \geq n_3 \geq n_4 \geq \dots \geq 1$  olduğundan,  $n_i$ 'ler eninde sonunda sabitlenir. Dolayısıyla,  $\mathbb{Z}$ 'nin ideallerinin kısmi sıralı kümesi artan zincir koşulunu sağlar.

Genel olarak, her temel ideal halkası Noether halkasıdır. Gerçekten,  $R$ 'nin ideallerinin bir artan zinciri

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq I_3 \subseteq \dots$$

ise  $I = \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$  bir idealdir ve  $R$  bir temel ideal halkası olduğundan,  $I = Ra$  olacak şekilde bir  $a \in R$  elemanı vardır. O zaman  $a \in I_n$  olacak şekilde bir  $n$  doğal sayısı vardır. Fakat, bu durumda,  $I \subseteq I_n \subseteq I_{n+1} \subseteq I_{n+2} \subseteq \dots \subseteq I$  olacağından,  $I = I_n = I_{n+1} = I_{n+2} = \dots$  olur. Böylece,  $R$  bir Noether halkasıdır.

Öte yandan, her cisim bir Noether halkasıdır. Gerçekten,  $F$  bir cisim ise,  $F$ 'nin yalnızca  $\{0\}$  ve  $F$  olmak üzere iki ideali vardır. Dolayısıyla,  $F$ 'nin ideallerinin kısmi sıralı kümesi artan zincir koşulunu sağlar. Daha genel olarak, sadece sonlu sayıda ideali olan her halka bir Noether halkasıdır. (Örneğin,  $\mathbb{Z}_n$  bir Noether halkasıdır.)

**Teorem 12.3**

$R$  bir halka ve  $M$  bir  $R$ -modül olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

- (i)  $M$  bir Noether modüldür.
- (ii)  $M$ 'nin alt modüllerinin boştan farklı her ailesinin bir maksimal elemanı vardır.
- (iii)  $M$ 'nin alt modüllerinin her biri sonlu üretilmiştir.

**Kanıt.**

(i)  $\Leftrightarrow$  (ii) denkliği Teorem 12.1'den elde edilir.

(ii)  $\Rightarrow$  (iii) : Kabul edelim ki  $M$ 'nin bir alt modülü  $N$  sonlu üretilmemiş olsun.  $\Omega$ ,  $N$ 'nin sonlu üretilmiş alt modüllerinin tümünün kümesi olsun.  $\Omega$  boştan farklıdır çünkü  $\{0\} \in \Omega$  dır. (ii) kabulümüz gereğince,  $\Omega$ 'nın bir maksimal elemanı  $N_1$  vardır.  $N_1$  sonlu üretilmiş olduğundan,  $N_1 \neq N$  olur. Buna göre  $x \in N \setminus N_1$  olacak şekilde bir  $x$  elemanı vardır. O zaman  $N_1 + Rx$  alt modülü,  $N$ 'nin  $N_1$ 'i içeren sonlu üretilmiş bir alt modüldür. Fakat  $N_1 \neq N_1 + Rx$  olduğundan bu durum  $N_1$ 'in maksimal olması ile çelişir. Böylece,  $M$ 'nin her alt modülü sonlu üretilmiştir.

(iii)  $\Rightarrow$  (i) :  $M$ 'nin alt modüllerinden oluşan bir artan zincir

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq N_3 \subseteq \dots$$

olsun. O zaman  $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} N_i$  bir alt modüldür ve (iii) kabulümüz gereğince  $N$  sonlu üretilmiştir. O zaman  $N = Rm_1 + Rm_2 + \dots + Rm_k$  olacak şekildeki  $m_i \in N$  elemanları vardır. Her  $1 \leq j \leq k$  için  $m_j \in N_{n_j}$  olacak şekilde bir  $n_j$  doğal sayısı vardır.  $n = \max\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  alalım. O zaman her  $1 \leq j \leq k$  için  $m_j \in N_n$  olur. Dolayısıyla

$$N = Rm_1 + Rm_2 + \dots + Rm_k \subseteq N_n \subseteq N$$

elde edilir. Böylece,  $N = N_n$  olur ve artan zincir durmuş olur. ■

**Örnek :**

$R$  bir temel ideal bölgesi (TİB) ise,  $R$  bir Noether halkasıdır. Gerçekten,  $R$ 'nin her ideali bir tek eleman tarafından üretilebildiğinden Teorem 12.3'in (iii) koşulu sağlanır ve dolayısıyla  $R$  bir Noether halkasıdır. ■

### Teorem 12.4

Eğer  $R$  bir Noether halkası ise,  $R[x]$  polinom halkası da bir Noether halkasıdır.

**Kant.**

$R[x]$ 'nin bir idealini  $\mathcal{J}$  alalım.  $\mathcal{J}$ 'nin sonlu üretilmiş olduğunu göstereceğiz. Sıfır ideali sonlu üretilmiş olduğundan  $\mathcal{J} \neq 0$  olduğunu kabul edebiliriz.  $J$ ,  $\mathcal{J}$ 'deki sıfırdan farklı polinomların baş katsayılarına  $0_R$  ilave edilmesiyle elde edilen küme olsun. O zaman  $J$ ,  $R$ 'nin bir idealidir. (Gösteriniz. ?)  $R$  bir Noether halkası olduğundan,  $J$  sonlu üretilmiştir. O zaman,  $I = Ra_1 + \dots + Ra_k$  olacak şekilde sıfırdan farklı  $a_1, \dots, a_k \in J$  elemanları vardır. Her  $1 \leq i \leq k$  için,  $\mathcal{J}$ 'deki baş katsayısı  $a_i$  olan en az bir polinom seçelim ve bu polinomlara sırasıyla  $f_1, \dots, f_k$  diyelim. Dikkat edilirse  $f_1, \dots, f_k$  polinomlarının derecelerini eşit kabul edebiliriz. Bu derece  $t$  olsun. Şimdi, her  $0 \leq i \leq t-1$  için,  $J_i$ ,  $\mathcal{J}$ 'deki derecesi  $i$  olan polinomların baş katsayılarına  $0_R$  ilave edilmesiyle elde edilen küme olsun. O zaman  $J_i$ ,  $R$ 'nin bir idealidir. (Gösteriniz. ?)  $R$  bir Noether halkası olduğundan,  $J_i$  sonlu üretilmiştir. O zaman,  $J_i = Rb_{i1} + Rb_{i2} + \dots + Rb_{in_i}$  olacak şekilde sıfırdan farklı  $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{in_i} \in J_i$  elemanları vardır. Her  $1 \leq j \leq n_i$  için,  $\mathcal{J}$ 'deki baş katsayısı  $b_{ij}$  olan bir polinom seçelim ve bu polinomlara sırasıyla  $g_{ij}$  diyelim. Şimdi,  $\mathcal{J}$ 'nin  $f_1, \dots, f_k$  ve tüm  $g_{ij}$  polinomları tarafından üretildiğini gösterelim.  $R[x]$ 'in  $f_1, \dots, f_k$  ve tüm  $g_{ij}$  polinomları tarafından üretilen ideali  $H$  olsun.  $H \subseteq \mathcal{J}$  olduğu açıktır. Tersine  $\mathcal{J}$ 'den bir  $f \neq 0$  polinomu alalım.  $n = \text{der}(f)$  olsun.  $n$  üzerine tümevarım uygulayacağız.  $n = 0$  ise  $f$  sabit polinomudur ve baş katsayısı  $f$  olduğundan  $f \in J_0$  dir. O zaman,  $f$ 'yi  $g_{0j}$  polinomlarının bir kombinasyonu olarak yazabiliriz; böylece,  $f \in H$  olur.  $n > 0$  ve  $\mathcal{J}$ 'nin, derecesi  $n$ 'den küçük

olan her polinomu  $H$  içinde olsun.

$f$ 'nin baş katsayısı  $a$  olsun.  $n < t$  ise  $g = \sum r_j g_{nj}$  polinomunun başkatsayısı  $a$  olacak şekilde  $r_j \in R$  elemanları vardır.  $n \geq t$  ise  $g = \sum r_i f_i x^{n-t}$  polinomunun başkatsayısı  $a$  olacak şekilde  $r_i \in R$  elemanları vardır. Her iki durumda da  $f - g$  polinomunun derecesi  $n$ 'den küçüktür. O zaman, tümevarım varsayımımız gereğince  $f - g \in H$  olur.  $g \in H \subseteq \mathcal{J}$  olduğundan  $f = f - g + g \in H$  olur. Böylece,  $\mathcal{J} \subseteq H$  da gösterilmiş olur ve  $\mathcal{J} = H$  elde edilir. Böylece,  $\mathcal{J}$  sonlu üretilmiştir. ■