

---

---

# BÖLÜM 1

---

## BİR LİNEER OPERATÖRÜN YAPISI

1	Modül Olarak Vektör Uzayı: $V_T$ .	2
2	Sıfırlayanlar ve Minimal Polinom	2
3	Devirli Ayrışım ve Eşlik Matrisleri	3
4	Rasyonel Kanonik Form ve Değişmez Çarpanlar . . . . .	4
5	Elemanter Bölenler ve Jordan Kanonik Formu . . . . .	6

Bu bölümde, sonlu boyutlu vektör uzayları üzerindeki lineer operatörlerin yapısı derinlemesine incelenecektir. Bir önceki bölümde geliştirilen **Temel İdeal Bölgeleri (TİB) üzerindeki Modüller** teorisi, burada  $\mathbb{F}[x]$  halkası üzerinden bir modül olarak ele alınan vektör uzaylarına uygulanacaktır. Bu yaklaşım, lineer cebirin en derin sonuçlarından olan Rasyonel Kanonik Form ve Jordan Kanonik Formu'nun varlığını ve tekliğini garanti eden değişmez çarpanlar ve elemanter bölenler kavramlarını doğal bir şekilde ortaya çıkarır.

## 1 Modül Olarak Vektör Uzayı: $V_\tau$

$V$ , bir  $\mathbb{F}$  cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve  $\tau \in \mathcal{L}(V)$  bir lineer operatör olsun.  $V$  üzerindeki standart yapı, skalerlerin  $\mathbb{F}$  cisiminden gelmesiyle oluşur. Ancak  $\tau$  operatörünü kullanarak skalerler halkasını  $\mathbb{F}[x]$  polinom halkasına genişletebiliriz. Bunun için öncelikle  $\tau$  operatörünün kuvvetlerinin lineer kombinasyonlarının yine lineer operatörler oluşturduğunu hatırlayalım:

Her  $\mathbf{v} \in V$  için  $(a_n\tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \dots + a_1\tau + a_0I_V)(\mathbf{v}) = a_n \cdot \tau^n(\mathbf{v}) + a_{n-1} \cdot \tau^{n-1}(\mathbf{v}) + \dots + a_1 \cdot \tau(\mathbf{v}) + a_0\mathbf{v}$ .

Eğer  $p(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$  denirse bu operatörü  $p(\tau)$  şeklinde gösterebiliriz. Aşağıdaki tanımda  $V$  üzerinde bir  $\mathbb{F}[x]$ -etkisi tanımlanmıştır.

### Tanım 1.1

Herhangi bir  $p(x) \in \mathbb{F}[x]$  polinomu ve  $\mathbf{v} \in V$  vektörü için  $p(x)$ 'in  $\mathbf{v}$  üzerine etkisi şu şekilde tanımlanır:

$$p(x) \cdot \mathbf{v} := p(\tau)(\mathbf{v})$$

Burada  $p(\tau)$ , polinomda  $x$  yerine  $\tau$  operatörünün yazılmasıyla elde edilen operatördür.

Yukarıdaki tanımda verilen işlem  $V$ 'yi bir  $\mathbb{F}[x]$ -**modül** yapar. Bu yapıya  $\tau$  **ile ilişkili modül** denir ve  $V_\tau$  ile gösterilir.  $\mathbb{F}[x]$  bir TİB olduğundan, TİB üzerindeki sonlu üretilmiş modüller için geçerli olan tüm teoremler  $V_\tau$  için de geçerlidir. Lineer operatörlerin yapısını ortaya çıkarmak için bu ana fikri kullanacağız.

Sonlu boyutlu vektör uzayları üzerindeki lineer operatörlerin yapısının incelendiği bu bölüm boyunca, aksi belirtilmedikçe  $V$  bir  $\mathbb{F}$  cismi üzerinde sonlu boyutlu vektör uzayı,  $\tau \in \mathcal{L}(V)$  bir lineer operatör ve  $V_\tau$  de  $\tau$  ile ilişkili  $\mathbb{F}[x]$ -modülü olacaktır.

## 2 Sıfırlayanlar ve Minimal Polinom

Bir modül elemanının (veya tüm modülün) sıfırlayanı, lineer cebirdeki minimal polinom kavramıyla örtüşür.

### Tanım 2.1: Sıfırlayan (Annihilator) ve Minimal Polinom

- (1) Bir  $\mathbf{v} \in V$  vektörünün sıfırlayanı (mertebesi),  $(\# \mathbf{v}) = \{p(x) \in \mathbb{F}[x] \mid p(\tau)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$  idealini üreten monik polinomdur. Buna  $\mathbf{v}$ 'nin  $\tau$ -**minimal polinomu** denir ve  $\mu_{\mathbf{v},\tau}(x)$  ile gösterilir.

- (2) Tüm  $V$  uzayının sıfırlayanı ise  $(\#V) = \{p(x) \in \mathbb{F}[x] \mid \forall \mathbf{v} \in V, p(\tau)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$  idealini üreten monik polinomdur. Buna operatörün **minimal polinomu** denir ve  $m_\tau(x)$  ile gösterilir.

### 3 Devirli Ayrışım ve Eşlik Matrisleri

TİB üzerindeki modüller teorisinden biliyoruz ki, sonlu üretilmiş her modül, devirli alt modüllerin direkt toplamı olarak yazılabilir. Lineer cebirde bu, uzayın  $\tau$ -devirli (cyclic) alt uzaylara ayrışması anlamına gelir.

#### Tanım 3.1: $\tau$ -Devirli Alt Uzay

Bir  $\mathbf{v} \in V$  için,  $Z(\mathbf{v}; \tau)$  ile gösterilen  $\tau$ -devirli alt uzay,  $\mathbf{v}$  tarafından üretilen  $\mathbb{F}[x]$ -alt modüldür:

$$Z(\mathbf{v}; \tau) = \text{span}\{\mathbf{v}, \tau(\mathbf{v}), \tau^2(\mathbf{v}), \dots\}$$

Eğer  $Z(\mathbf{v}; \tau)$ 'nin boyutu  $k$  ise,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \tau(\mathbf{v}), \dots, \tau^{k-1}(\mathbf{v})\}$  bu alt uzay için bir bazdır.

Bu özel bazda operatörün matris temsili çok spesifik bir forma sahiptir.

#### Tanım 3.2: Eşlik Matrisi (Companion Matrix)

Monik bir  $p(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$  polinomu verilsin. Bu polinoma karşılık gelen **eşlik matrisi**  $C(p(x))$  şu şekildedir:

$$C(p(x)) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -a_{k-1} \end{bmatrix}$$

#### Teorem 3.3

$V$  üzerindeki  $\tau$  lineer operatörünün  $\mathbf{v} \in V$  için oluşturduğu  $\tau$ -devirli alt uzay  $Z(\mathbf{v}; \tau)$ 'nin minimal polinomu  $\mu_{\mathbf{v}, \tau}(x) = p(x)$  ise,  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}, \tau(\mathbf{v}), \dots, \tau^{k-1}(\mathbf{v})\}$  bazında  $\tau$ 'nin matris temsili eşlik matrisi  $C(p(x))$ 'dir:

$$[\tau]_{\mathcal{B}} = C(p(x))$$

**Kanıt.**

$\tau$  operatörünün  $\mathbf{v}$  üzerindeki etkisini baz elemanları cinsinden inceleyelim:

$$\tau(\mathbf{v}) = \tau^1(\mathbf{v})$$

$$\tau(\tau(\mathbf{v})) = \tau^2(\mathbf{v})$$

$$\vdots$$

$$\tau(\tau^{k-2}(\mathbf{v})) = \tau^{k-1}(\mathbf{v})$$

Son olarak, minimal polinomun tanımından dolayı,

$$\tau(\tau^{k-1}(\mathbf{v})) = \tau^k(\mathbf{v}) = -a_{k-1}\tau^{k-1}(\mathbf{v}) - a_{k-2}\tau^{k-2}(\mathbf{v}) - \cdots - a_1\tau(\mathbf{v}) - a_0\mathbf{v}$$

Bu ifadeler,  $\tau$  operatörünün  $\mathcal{B}$  bazındaki matris temsili için gerekli sütunları verir. Bu sütunlar birleştirildiğinde, eşlik matrisi  $C(p(x))$  elde edilir. ■

## 4 Rasyonel Kanonik Form ve Değişmez Çarpanlar

Şimdi TİB üzerindeki modüller için Yapı Teoremi'ni (Bölüm 6, Teorem 6.X) uygulayarak lineer operatörler için en genel formu elde edelim.

### Teorem 4.1: Rasyonel Kanonik Form (Değişmez Çarpanlar)

Sonlu boyutlu  $V$  uzayı üzerindeki her  $\tau$  lineer operatörü için,  $V$  uzayı  $\tau$ -devirli alt uzayların direkt toplamı olarak yazılabilir:

$$V = Z(\mathbf{v}_1; \tau) \oplus Z(\mathbf{v}_2; \tau) \oplus \cdots \oplus Z(\mathbf{v}_r; \tau)$$

Burada her bir alt uzayın minimal polinomu  $d_i(x) = \mu_{\mathbf{v}_i}(x)$  olmak üzere, bu polinomlar (Değişmez Çarpanlar) şu şartları sağlar:

1. Her  $d_i(x)$  moniktir.
2.  $d_1(x) \mid d_2(x) \mid \cdots \mid d_r(x)$ . (Bölünebilme şartı).
3.  $d_r(x) = m_\tau(x)$  (Operatörün minimal polinomu).
4.  $\prod_{i=1}^r d_i(x) = c_\tau(x)$  (Karakteristik polinom).

Bu baza göre  $\tau$ 'nın matrisi blok köşegeneldir ve **Rasyonel Kanonik Form** adını alır:

$$[T]_{\mathcal{B}} = \text{diag}(C(d_1), C(d_2), \dots, C(d_r))$$

**Kanıt.**

$V_\tau$  sonlu üretilmiş bir burulmalı (torsion)  $\mathbb{F}[x]$ -modülüdür. TİB üzerindeki modüllerin yapı teoremi gereği,  $V_\tau \cong \mathbb{F}[x]/\langle d_1 \rangle \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}[x]/\langle d_r \rangle$  şeklinde bir izomorfizma vardır ve  $d_1 \mid \cdots \mid d_r$  sağlanır. Her bir  $\mathbb{F}[x]/\langle d_i \rangle$  bileşeni,  $d_i(x)$  minimal polinomuna sahip devirli bir alt uzaya karşılık gelir. Bu alt uzayların her biri için uygun bir devirli baz seçildiğinde, o bloktaki matris temsili  $d_i(x)$ 'in eşlik matrisi  $C(d_i)$  olur. ■

**Not.**

Rasyonel Kanonik Form, cisimden bağımsızdır. Yani  $\mathbb{F}$  cismini genişletseniz bile (örneğin  $\mathbb{R}$ 'den  $\mathbb{C}$ 'ye geçerseniz), değişmez çarpanlar ve dolayısıyla rasyonel form değişmez. Bu, formun "rasyonel" (hesaplanabilir) doğasından gelir.

**Örnek: Değişmez Çarpanların Bulunması**

$\mathbb{F} = \mathbb{Q}$  olsun.  $4 \times 4$  boyutlu bir  $A$  matrisinin minimal polinomu  $m_A(x) = (x-1)(x^2+1)$  olsun. Karakteristik polinom ise  $c_A(x) = (x-1)^2(x^2+1)$  olsun. Değişmez çarpanları  $(d_1, \dots, d_r)$  bulalım. Şartlar:

- $d_r = m_A(x) = (x-1)(x^2+1)$ .
- $d_1 \cdots d_r = c_A(x)$ .
- $d_i \mid d_{i+1}$ .

$d_r$  en büyük olandır. Geriye kalan çarpan  $\frac{c_A}{m_A} = x-1$ . Bu çarpan  $d_{r-1}$  olmalıdır. Kontrol edelim:  $(x-1)$  böler mi  $(x-1)(x^2+1)$ ? Evet. O halde değişmez çarpanlar:

$$d_1(x) = x-1, \quad d_2(x) = (x-1)(x^2+1) = x^3 - x^2 + x - 1$$

Rasyonel Kanonik Form:

$$R = \begin{bmatrix} C(x-1) & 0 \\ 0 & C(x^3 - x^2 + x - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

## 5 Elemanter Bölenler ve Jordan Kanonik Formu

Değişmez çarpanlar ( $d_i$ ) yerine, bunları asal çarpanlarının kuvvetlerine ayırarak da modülü parçalayabiliriz. Bu parçalara **Elemanter Bölenler** denir.

### Teorem 5.1: Asal Ayrışım Teoremi (Elemanter Bölenler)

$V_\tau$  modülü,  $m_\tau(x) = p_1(x)^{e_1} \cdots p_k(x)^{e_k}$  minimal polinomunun asal çarpanlarına göre **asal (primary) alt modüllerin** direkt toplamı olarak yazılabilir:

$$V = V_{p_1} \oplus V_{p_2} \oplus \cdots \oplus V_{p_k}$$

Burada her  $V_{p_i} = \ker(p_i(\tau)^N)$  şeklindedir (yeterince büyük  $N$  için). Daha sonra her bir  $V_{p_i}$  kendi içinde devirli alt modüllere ayrılır. Ortaya çıkan tüm devirli alt modüllerin minimal polinomları  $\{q_1(x), \dots, q_s(x)\}$  kümesine  $V_\tau$ 'nin **elemanter bölenleri** denir. Her elemanter bölen  $q_j(x)$ , bir asal polinomun kuvvetidir:  $p(x)^k$ .

Eğer  $\mathbb{F}$  cismi cebirsel kapalıysa (örneğin  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ) veya polinomlar lineer çarpanlara ayrılabilirse ( $p(x) = x - \lambda$ ), o zaman elemanter bölenler  $(x - \lambda)^k$  formundadır. Bu durum Jordan Kanonik Formu'nu doğurur.

### Tanım 5.2: Jordan Bloğu ve Jordan Formu

Elemanter bölen  $(x - \lambda)^k$  ise, buna karşılık gelen eşlik matrisi yerine, daha basit olan **Jordan Bloğu**  $J_k(\lambda)$  tercih edilir:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{bmatrix}_{k \times k}$$

Bir operatörün matrisi, köşegeninde Jordan blokları olacak şekilde yazılabilirse buna **Jordan Kanonik Formu** denir.

### Örnek: Elemanter Bölenlerden Jordan Forma

Bir operatörün değişmez çarpanları  $d_1(x) = (x - 2)$ ,  $d_2(x) = (x - 2)(x - 3)^2$  olsun.

1. **Elemanter Bölenleri Bulma:** Değişmez çarpanları asal kuvvetlere ayıralım.

- $d_1 = (x - 2) \rightarrow$  Elemanter bölen:  $(x - 2)$
- $d_2 = (x - 2)(x - 3)^2 \rightarrow$  Elemanter bölenler:  $(x - 2)$  ve  $(x - 3)^2$

Elemanter Bölenler Listesi:  $\{(x - 2), (x - 2), (x - 3)^2\}$

2. **Jordan Formu Yazma:** Her elemanter bölen bir Jordan bloğuna karşılık gelir.

- $(x - 2) \rightarrow J_1(2) = [2]$
- $(x - 2) \rightarrow J_1(2) = [2]$
- $(x - 3)^2 \rightarrow J_2(3) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

Matris:

$$J = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**Not.**

### Değişmez Çarpanlar vs. Elemanter Bölenler

- **Değişmez Çarpanlar ( $d_i$ ):** Büyük bloklar verir.  $d_i \mid d_{i+1}$  şartı vardır. Çarpımları karakteristik polinomu verir. Rasyonel Kanonik Formu oluşturur.
- **Elemanter Bölenler ( $q_j$ ):**  $d_i$ 'lerin parçalanmış halidir. Asal polinomların kuvvetleridir ( $p(x)^k$ ). Jordan Kanonik Formu (cisim uygunsa) oluşturur.