BÖLÜM 1

ÖZDEĞERLER VE ÖZVEKTÖRLER

Bu bölümde, lineer operatörlerin en temel değişmezleri olan özdeğerler ve özvektörler incelenecektir. Bir operatörün "köşegenleştirilebilir" olup olmadığını belirleyen geometrik ve cebirsel katlılık kavramları ele alınacak, ardından spektral çözülüm ve özizdüşümler (eigenprojections) aracılığıyla operatörlerin spektral teorisi kurulacaktır.

1 Temel Tanımlar: Özdeğer, Özvektör ve Spektrum

V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde sonlu boyutlu bir vektör uzayı ve $\tau \in \mathcal{L}(V)$ bir lineer operatör olsun. Operatörlerin yapısını anlamanın en iyi yollarından biri, operatörün bir skaler çarpım gibi davrandığı alt uzayları (doğruları) bulmaktır.

Tanım 1.1: Özdeğer ve Özvektör

Bir $\lambda \in \mathbb{F}$ skaleri için, eğer $\tau(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $\mathbf{v} \in V$ vektörü varsa, λ'ya τ'nun bir **özdeğeri** (eigenvalue), $\mathbf{v}$'ye ise λ özdeğerine karşılık gelen bir **özvektörü** (eigenvector) denir.
τ'nun tüm özdeğerlerinin kümesine τ'nun **spektrumu** denir ve $\sigma(\tau)$ veya $\mathrm{Spec}(\tau)$ ile gösterilir.

Her özdeğer, uzayda operatör altında değişmez kalan bir alt uzay tanımlar.

Tanım 1.2: Özuzay (Eigenspace)

$\lambda \in \sigma(\tau)$ olsun. λ'ya karşılık gelen tüm özvektörlerin (ve $\mathbf{0}$ vektörünün) oluşturduğu kümeye λ'nın **özuzayı** denir ve V_λ veya E_λ ile gösterilir:

$$V_\lambda = \ker(\tau - \lambda I)$$

Örnek

$\tau : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $\tau(x, y) = (x, 2y)$ operatörünü düşünelim.

- $\mathbf{e}_1 = (1, 0)$ için $\tau(\mathbf{e}_1) = (1, 0) = 1 \cdot \mathbf{e}_1$. Özdeğer: $\lambda_1 = 1$.
- $\mathbf{e}_2 = (0, 1)$ için $\tau(\mathbf{e}_2) = (0, 2) = 2 \cdot \mathbf{e}_2$. Özdeğer: $\lambda_2 = 2$.

Bu durumda $\sigma(\tau) = \{1, 2\}$ dir. V_1 x-ekseni, V_2 ise y-eksenidir.

2 Karakteristik Polinom

Özdeğerleri bulmanın en pratik yolu determinant kullanmaktır.

Tanım 2.1: Karakteristik Polinom

$\tau \in \mathcal{L}(V)$ operatörünün **karakteristik polinomu** $c_\tau(x)$ şu şekilde tanımlanır:

$$c_\tau(x) = \det(xI - \tau)$$

Eğer A, τ'nun bir matris temsili ise $c_\tau(x) = \det(xI - A)$ dır.

Teorem 2.2: Özdeğerler ve Karakteristik Polinom

$\lambda \in \mathbb{F}$ skalerinin τ'nun bir özdeğeri olması için gerek ve yeter şart, λ'nın karakteristik polinomun bir kökü olmasıdır. Yani:

$$\lambda \in \sigma(\tau) \iff c_\tau(\lambda) = 0$$

Kanıt.

> λ bir özdeğerdir $\iff$ $\exists \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ öyle ki $(\tau - \lambda I)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ $\iff$ $(\tau - \lambda I)$ operatörü tekil (singular) bir operatördür (birebir değildir) $\iff$ $\det(\tau - \lambda I) = 0$ $\iff$ $\det(\lambda I - \tau) = 0$ (Boyut n ise $(-1)^n$ farkı vardır, sıfırı etkilemez) $\iff$ $c_\tau(\lambda) = 0$. ■

3 Geometrik ve Cebirsel Katlılık

Bir özdeğerin "büyüklüğü" iki farklı şekilde ölçülebilir. Bu iki ölçüm arasındaki ilişki, operatörün köşegenleştirilebilir olup olmadığını belirler.

Tanım 3.1: Katlılıklar

λ, τ'nun bir özdeğeri olsun.

1. **Cebirsel Katlılık (μ_λ):** λ'nın, karakteristik polinom $c_\tau(x)$'in bir kökü olarak katlılığıdır. Yani $(x - \lambda)^{\mu_\lambda}$, $c_\tau(x)$'i bölen en büyük kuvvettir.

2. **Geometrik Katlılık (γ_λ):** λ'ya karşılık gelen özuzayın boyutudur.

$$\gamma_\lambda = \dim(V_\lambda) = \dim(\ker(\tau - \lambda I))$$

Teorem 3.2: Katlılık Eşitsizliği

Her özdeğer λ için, geometrik katlılık cebirsel katlılığı geçemez:

$$1 \leq \gamma_\lambda \leq \mu_\lambda$$

Kanıt.

$\gamma_\lambda = k$ olsun. V_λ için bir $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ bazı seçelim ve bunu V'nin bir bazı olan $\mathcal{B}$'ye genişletelim. Bu baza göre τ'nun matrisi şu blok formdadır:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda I_k & B \\ 0 & C \end{bmatrix}$$

Karakteristik polinom: $c_\tau(x) = \det(xI - A) = \det((x-\lambda)I_k) \cdot \det(xI - C) = (x-\lambda)^k \cdot c_C(x)$. Bu eşitlik, $(x-\lambda)^k$'nın $c_\tau(x)$'i böldüğünü gösterir. Dolayısıyla $c_\tau(x)$ içindeki $(x-\lambda)$ çarpanının toplam sayısı (μ_λ), en az k (γ_λ) olmalıdır. ■

4 Köşegenleştirilebilirlik (Diagonalizability)

Bir operatörün "en basit" hali, matrisinin köşegen (diyagonal) olduğu durumdur.

Tanım 4.1: Köşegenleştirilebilirlik

Eğer V uzayı, τ'nun özvektörlerinden oluşan bir baza sahipse, τ operatörüne **köşegenleştirilebilir** denir. Bu durumda, bu baza göre matris temsili köşegen bir matristir.

Aşağıdaki teorem, köşegenleştirilebilirlik için en kullanışlı kriterleri sunar.

Teorem 4.2: Köşegenleştirme Kriterleri

Aşağıdaki ifadeler denktir:

1. τ köşegenleştirilebilir.
2. Karakteristik polinom $c_\tau(x)$, $\mathbb{F}$ üzerinde lineer çarpanlarına ayrışır ve her özdeğer için **geometrik katlılık cebirsel katlılığa eşittir** ($\gamma_\lambda = \mu_\lambda$).
3. V, özuzayların direkt toplamıdır: $V = \bigoplus_{\lambda \in \sigma(\tau)} V_\lambda$.
4. Özuzayların boyutları toplamı uzayın boyutuna eşittir: $\sum_\lambda \dim(V_\lambda) = \dim(V)$.

Kanıt.

Bu ispatı (1) $\implies$ (2) $\implies$ (3) $\implies$ (4) $\implies$ (1) döngüsüyle yapacağız.

(1) $\implies$ (2): Varsayalım ki τ köşegenleştirilebilir. O zaman V uzayı için τ'nun özvektörlerinden oluşan bir $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ bazı vardır. Bu baza göre τ'nun matrisi D köşegen matrisidir:

$$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

Karakteristik polinom $c_\tau(x) = \det(xI - D) = \prod_{i=1}^n (x - \lambda_i)$ olur. Görüldüğü gibi $c_\tau(x)$ tamamen lineer çarpanlara ayrışmıştır.

Şimdi belirli bir özdeğer λ_0'ı ele alalım. λ_0 özdeğeri, köşegen üzerindeki λ_i'lerden tam olarak μ_{λ_0} (cebirsel katlılık) tanesine eşittir. Genelliği bozmadan ilk $k = \mu_{\lambda_0}$ tanesinin λ_0 olduğunu varsayalım. O zaman $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ vektörleri V_{λ_0} özuzayındadır ve lineer bağımsızdır. Dolayısıyla $\dim(V_{\lambda_0}) \geq k = \mu_{\lambda_0}$. Daha önce (Teorem X) her zaman $\gamma_{\lambda_0} \leq \mu_{\lambda_0}$ olduğunu biliyorduk. O halde $\gamma_{\lambda_0} = \mu_{\lambda_0}$ olmak zorundadır.

(2) $\implies$ (3): Varsayalım ki $c_\tau(x) = \prod_{i=1}^k (x - \lambda_i)^{\mu_i}$ şeklinde ayrışıyor (burada λ_i'ler farklı özdeğerler) ve her i için $\dim(V_{\lambda_i}) = \mu_i$. Farklı özdeğerlere ait özvektörlerin lineer bağımsız olduğunu biliyoruz. Bu özellik, özuzayların toplamının direkt toplam olduğunu gösterir (yani $V_{\lambda_i} \cap \sum_{j\neq i} V_{\lambda_j} = \{\mathbf{0}\}$). Böylece $W = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ alt uzayını oluşturabiliriz. Bu alt uzayın boyutu:

$$\dim(W) = \sum_{i=1}^k \dim(V_{\lambda_i}) = \sum_{i=1}^k \gamma_{\lambda_i}$$

Hipotez gereği $\gamma_{\lambda_i} = \mu_{\lambda_i}$ olduğundan:

$$\dim(W) = \sum_{i=1}^k \mu_{\lambda_i} = \deg(c_\tau(x)) = \dim(V)$$

W, V'nin bir alt uzayı ve boyutları eşit olduğundan $W = V$ olmalıdır. Yani $V = \bigoplus_\lambda V_\lambda$.

(3) $\implies$ (4): Bu adım trivialdir (aşikardır). Eğer $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$ ise, direkt toplamın boyutu, bileşenlerin boyutları toplamına eşittir:

$$\dim(V) = \dim(V_{\lambda_1}) + \cdots + \dim(V_{\lambda_k}) = \sum_{\lambda\in\sigma(\tau)} \dim(V_\lambda)$$

(4) $\implies$ (1): Varsayalım ki $\sum_{i=1}^k \dim(V_{\lambda_i}) = n = \dim(V)$. Her bir V_{λ_i} özuzayı için bir $\mathcal{B}_i$ tabanı seçelim. Özuzayların toplamı her zaman direkt toplam olduğundan, bu tabanların birleşimi $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{B}_k$ kümesi lineer bağımsızdır. $\mathcal{B}$ kümesindeki eleman sayısı:

$$|\mathcal{B}| = \sum_{i=1}^k |\mathcal{B}_i| = \sum_{i=1}^k \dim(V_{\lambda_i}) = n$$

n boyutlu bir uzayda n tane lineer bağımsız vektör bir taban oluşturur. $\mathcal{B}$ kümesi tamamen özvektörlerden oluştuğu için, V uzayı özvektörlerden oluşan bir tabana sahiptir. Bu da τ'nun köşegenleştirilebilir olduğu anlamına gelir. ■

5 Minimal Polinom ve Köşegenleştirme

Bölüm 7'de gördüğümüz minimal polinom kavramı, köşegenleştirme için çok zarif bir test sağlar.

Teorem 5.1: Minimal Polinom Testi

τ operatörünün köşegenleştirilebilir olması için gerek ve yeter şart, minimal polinomu $m_\tau(x)$'in $\mathbb{F}$ üzerinde **farklı (distinct) lineer çarpanların** çarpımı olmasıdır.

$$m_\tau(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_k) \quad (\lambda_i \neq \lambda_j)$$

Kanıt.

($\Longrightarrow$) **Gereklilik:** Varsayalım ki τ köşegenleştirilebilir. O halde $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ operatörün farklı özdeğerleri olmak üzere, V uzayı özuzayların direkt toplamıdır:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$$

Şu polinomu tanımlayalım:

$$p(x) = (x - \lambda_1)(x - \lambda_2)\cdots(x - \lambda_k)$$

Bu polinom, farklı lineer çarpanların çarpımıdır. $p(\tau)$'nun V üzerindeki etkisine bakalım. Herhangi bir $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k$ ($\mathbf{v}_i \in V_{\lambda_i}$) şeklinde yazılabilir. Her bir bileşen için:

$$(\tau - \lambda_i I)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

olduğundan, $p(\tau)$ operatörü içinde $(\tau - \lambda_i I)$ çarpanı bulunduğu için $p(\tau)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ olur. Lineerlikten dolayı $p(\tau)\mathbf{v} = \sum p(\tau)\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ olur. Yani $p(\tau)$ sıfır operatörüdür. Minimal polinomun tanımı gereği $m_\tau(x)$, $p(x)$'i bölmelidir. Diğer yandan, bir operatörün minimal polinomunun kökleri tam olarak onun özdeğerleridir (Teorem X). Yani her $(x - \lambda_i)$ çarpanı $m_\tau(x)$ içinde bulunmalıdır. Sonuç olarak $m_\tau(x) = p(x)$ olmak zorundadır.

($\Longleftarrow$) **Yeterlilik:** Varsayalım ki minimal polinom $m_\tau(x) = (x - \lambda_1)\cdots(x - \lambda_k)$ şeklinde farklı lineer çarpanların çarpımı olsun. $p_i(x) = (x - \lambda_i)$ polinomlarını tanımlayalım. λ_i'ler farklı olduğu için bu polinomlar $\mathbb{F}[x]$ halkasında **ikişerli aralarında asaldır**. Asal Ayrışım Teoremi (Primary Decomposition Theorem - Bölüm 7) gereği:

$$V = \ker(p_1(\tau)) \oplus \ker(p_2(\tau)) \oplus \cdots \oplus \ker(p_k(\tau))$$

Burada $\ker(p_i(\tau)) = \ker(\tau - \lambda_i I)$ tam olarak λ_i özdeğerine karşılık gelen **özuzaydır** (V_{λ_i}). O halde:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$$

Uzay, özuzayların direkt toplamı olarak yazılabildiği için, Köşegenleştirme Kriterleri (Teorem 8.5) gereği τ köşegenleştirilebilirdir. ∎

Not.

Bu testin en güçlü yanı, özuzayların boyutlarını (geometrik katlılıkları) hesaplamaya gerek bırakmamasıdır. Sadece minimal polinomun kare (veya daha yüksek kuvvetli) çarpan içerip içermediğine bakmak yeterlidir. Örneğin $m(x) = (x-1)(x-2)$ ise matris köşegenleşir, ama $m(x) = (x-1)^2$ ise köşegenleşmez.

Örnek: Köşegenleştirme Testi

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ matrisini düşünelim.

- Karakteristik polinom: $c_A(x) = (x-2)^2$. Özdeğer $\lambda = 2$, cebirsel katlılık $\mu = 2$.
- Minimal polinom: $(x-2)$ veya $(x-2)^2$ olabilir. $(A-2I) \neq 0$ olduğundan $m_A(x) = (x-2)^2$.
- **Analiz 1 (Katlılık):** Geometrik katlılık $\dim(\ker(A-2I)) = \dim(\text{span}\{(1,0)\}) = 1$. $1 < 2$ olduğu için köşegenleştirilemez.
- **Analiz 2 (Minimal Polinom):** $m_A(x) = (x-2)^2$ tekrarlı çarpan içerdiği için köşegenleştirilemez.

6 Özizdüşümler ve Spektral Çözülüm

Eğer τ köşegenleştirilebilirse, uzay özuzayların direkt toplamıdır: $V = V_{\lambda_1} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$. Bu durumda her $\mathbf{v} \in V$, tek türlü olarak $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k$ ($\mathbf{v}_i \in V_{\lambda_i}$) şeklinde yazılabilir. Bu ayrışım, özel bir operatör ailesini tanımlar.

Tanım 6.1: Özizdüşümler (Eigenprojections)

τ köşegenleştirilebilir olsun. Her i için, V_{λ_i} üzerine V_{λ_j} ($j \neq i$) uzayları boyunca yapılan izdüşüm operatörüne λ_i**'ye karşılık gelen özizdüşüm** denir ve P_i ile gösterilir. Yani $P_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_i$.

Özizdüşümler şu harika özellikleri sağlar:

1. $P_i^2 = P_i$ (İzdüşüm özelliği).
2. $P_i P_j = 0$ ($i \neq j$ için, ortogonallik benzeri özellik).

3. $I = P_1 + P_2 + \cdots + P_k$ (Birim operatörün ayrışımı).

4. $V_{\lambda_i} = \mathrm{im}(P_i) = \ker(I - P_i)$.

Bu yapı bize operatörün kendisini izdüşümler cinsinden ifade etme imkanı verir. Buna **Spektral Çözülüm** denir.

Teorem 6.2: Spektral Çözülüm (Spectral Resolution)

τ operatörü, farklı özdeğerleri $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ olan köşegenleştirilebilir bir operatör olsun. P_i'ler ilgili özizdüşümler olmak üzere:

$$\tau = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \cdots + \lambda_k P_k$$

Bu ifadeye τ'nun spektral çözülümü denir. Ayrıca herhangi bir polinom $f(x)$ (hatta uygun analiz koşullarında fonksiyonlar) için:

$$f(\tau) = f(\lambda_1)P_1 + f(\lambda_2)P_2 + \cdots + f(\lambda_k)P_k$$

yazılabilir.

Kanıt.

τ köşegenleştirilebilir olduğu için, Köşegenleştirme Kriterleri (Teorem 8.5) gereği V, özuzayların direkt toplamıdır:

$$V = V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \cdots \oplus V_{\lambda_k}$$

Bu demektir ki, herhangi bir $\mathbf{v} \in V$ vektörü, tek türlü olarak

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \cdots + \mathbf{v}_k$$

şeklinde yazılabilir; burada her $\mathbf{v}_i \in V_{\lambda_i}$ dir.

P_i operatörünün tanımı gereği, $P_i(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_i$ dir. (Yani P_i, $\mathbf{v}$'nin V_{λ_i} bileşenini seçip alır, diğerlerini sıfırlar).

1. **Birimin Çözülümü:** Her $\mathbf{v} \in V$ için:

$$(P_1 + \cdots + P_k)(\mathbf{v}) = P_1(\mathbf{v}) + \cdots + P_k(\mathbf{v}) = \mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k = \mathbf{v}$$

olduğundan $P_1 + \cdots + P_k = I$ dir.

2. **Spektral Çözülüm:** Şimdi τ'nun $\mathbf{v}$ üzerindeki etkisine bakalım:

$$\begin{aligned}
\tau(\mathbf{v}) &= \tau(\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_k) \\
&= \tau(\mathbf{v}_1) + \cdots + \tau(\mathbf{v}_k) \quad (\tau \text{ lineer}) \\
&= \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda_k \mathbf{v}_k \quad (\mathbf{v}_i \in V_{\lambda_i} \text{ olduğundan } \tau\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i) \\
&= \lambda_1 P_1(\mathbf{v}) + \cdots + \lambda_k P_k(\mathbf{v}) \quad (\mathbf{v}_i = P_i \mathbf{v}) \\
&= (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k)(\mathbf{v})
\end{aligned}$$

Bu eşitlik her $\mathbf{v} \in V$ için sağlandığından $\tau = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$ olur.

3. **Polinomlar İçin Genelleme:** Önce τ^n kuvvetini düşünelim. $P_i P_j = \delta_{ij} P_i$ özelliği (bunu göstermek kolaydır: $P_i(\mathbf{v}_j) = \mathbf{0}$ eğer $i \neq j$) sayesinde:

$$\tau^2 = (\sum \lambda_i P_i)(\sum \lambda_j P_j) = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j P_i P_j = \sum_i \lambda_i^2 P_i^2 = \sum_i \lambda_i^2 P_i$$

Tümevarımla $\tau^n = \sum \lambda_i^n P_i$ olur. Polinomların lineerliği sayesinde, herhangi bir $f(x) = \sum a_n x^n$ için:

$$f(\tau) = \sum a_n \tau^n = \sum a_n (\sum_i \lambda_i^n P_i) = \sum_i (\sum_n a_n \lambda_i^n) P_i = \sum_i f(\lambda_i) P_i$$

elde edilir. ∎

Not.

> Spektral çözülüm, operatör fonksiyonlarını hesaplamayı son derece kolaylaştırır. Örneğin bir matrisin karekökünü, üstel fonksiyonunu (e^A) veya tersini hesaplamak için sadece özdeğerler üzerinde işlem yapmak yeterlidir; izdüşüm operatörleri (P_i) sabit kalır.

Örnek: Spektral Çözülüm Hesabı

$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ olsun. Özdeğerler: $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$. Özizdüşümler, Lagrange interpolasyon polinomları kullanılarak veya doğrudan bulunabilir. Köşegen matris olduğu için çok açıktır:

$$P_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kontrol edelim: $3P_1 + 4P_2 = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} = A$. Ayrıca $A^{100} = 3^{100} P_1 + 4^{100} P_2$ işlemini yapmak çok kolaylaşır.

Not.

> Spektral çözülüm, operatörü basit yapıtaşlarına (skaler × izdüşüm) ayırır. Bu, kuantum mekaniğindeki ölçüm teorisinden sinyal işlemeye kadar birçok alanda temel teşkil eder.

Operatör Fonksiyonları ve Spektral Çözülümün Gücü

Spektral çözülüm teoremi ($\tau = \sum \lambda_i P_i$), sadece polinomlar için değil, analitik (Taylor serisi ile ifade edilebilen) fonksiyonlar için de genelleştirilebilir. Bu, karmaşık matris işlemlerini basit skaler işlemlere dönüştürür.

Mantıksal Temel

Bir $f(x)$ fonksiyonunun (örneğin e^x, $\sin(x)$, $\sqrt{x}$) Taylor serisine açıldığını düşünelim:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

Bu fonksiyonu bir A matrisine uygulamak demek, x yerine A yazmak demektir:

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n A^n$$

Eğer A'nın spektral çözülümü $A = \lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k$ ise, projeksiyonların $P_i^n = P_i$ ve $P_i P_j = 0$ ($i \neq j$) özelliklerinden dolayı A'nın kuvvetleri çok basitleşir:

$$A^n = (\lambda_1 P_1 + \cdots + \lambda_k P_k)^n = \lambda_1^n P_1 + \cdots + \lambda_k^n P_k$$

Bu ifadeyi $f(A)$ serisinde yerine koyarsak:

$$f(A) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\sum_{i=1}^{k} \lambda_i^n P_i) = \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda_i^n \right) P_i = \sum_{i=1}^{k} f(\lambda_i) P_i$$

sonucuna ulaşırız. **Özetle:** $f(A)$'yı bulmak için matrisin tamamıyla uğraşmak yerine, sadece özdeğerlerine f fonksiyonunu uygulamak ve sabit kalan P_i matrisleriyle çarpmak yeterlidir.

Örnek: Matris Üsteli (e^A)

Matris üsteli, diferansiyel denklem sistemlerinin çözümünde hayati bir rol oynar ve tanımı şöyledir:

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Spektral çözülüm tekniği ile bu sonsuz toplamı hesaplamak şu basit formüle indirgenir:

$$\boxed{e^A = e^{\lambda_1} P_1 + e^{\lambda_2} P_2 + \cdots + e^{\lambda_k} P_k}$$

Somut Hesaplama Örneği

$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ matrisinin e^A değerini hesaplayalım.

Adım 1: Özdeğerleri Bulma Karakteristik polinom: $c_A(x) = \det(A - xI) = (4-x)(1-x) - (-2)(1) = x^2 - 5x + 6 = (x-2)(x-3)$. Özdeğerler: $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$.

Adım 2: Özizdüşümleri (Spektral Projeksiyonları) Bulma Farklı özdeğerler olduğu için Lagrange interpolasyon formülünü kullanabiliriz:

$$P_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} = \frac{A - 3I}{2 - 3} = -(A - 3I) = -\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{A - 2I}{3 - 2} = (A - 2I) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(Sağlama: $P_1 + P_2 = I$ olmalıdır. $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Doğru.)

Adım 3: Fonksiyonu Uygulama Formülümüz: $e^A = e^{\lambda_1} P_1 + e^{\lambda_2} P_2$.

$$e^A = e^2 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} + e^3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Sonuç:

$$e^A = \begin{bmatrix} 2e^3 - e^2 & 2e^2 - 2e^3 \\ e^3 - e^2 & 2e^2 - e^3 \end{bmatrix}$$

Bu yöntemle A^{100}, $\sin(A)$ veya A^{-1} (eğer özdeğerler 0 değilse) gibi işlemleri de aynı P_1, P_2 matrislerini kullanarak saniyeler içinde yapabiliriz.