BÖLÜM 1

REEL VE KARMAŞIK İÇ ÇARPIM UZAYLARI

Bu bölüm, vektör uzaylarına uzunluk (norm) ve açı kavramlarını getiren **iç çarpım** (inner product) yapısını inceler. Gram-Schmidt ortogonalleştirme süreci ve lineer fonksiyonellerin temsili (Riesz Teoremi) bu bölümün temel taşlarıdır. Ayrıca operatörlerin "devriği" olan Adjoint operatör kavramı da burada tanıtılacaktır.

1 İç Çarpımlar ve Normlar

V, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun (Burada $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ dir).

Tanım 1.1: İç Çarpım

V üzerinde bir iç çarpım, $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{F}$ fonksiyonudur ve şu özellikleri sağlar:

1. **Doğrusallık (Birinci bileşende):** $\langle a\mathbf{u} + b\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = a\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + b\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$.
2. **Eşlenik Simetri (Hermitian Symmetry):** $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle}$. (Reel durumda simetri).
3. **Pozitif Tanımlılık:** $\forall \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ için $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle > 0$.

İç çarpım, vektörlerin uzunluğunu (normunu) tanımlamamızı sağlar: $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle}$.

Teorem 1.2: Cauchy-Schwarz Eşitsizliği

Her $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ için:

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle| \leq \|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|$$

Eşitlik ancak ve ancak $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ lineer bağımlıysa sağlanır.

2 Ortogonallik ve Gram-Schmidt Süreci

İki vektör $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ için $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ ise bu vektörlere **ortogonal** (dik) denir ve $\mathbf{u} \perp \mathbf{v}$ ile gösterilir. Eğer bir kümedeki vektörler ikişerli ortogonal ve her birinin normu 1 ise, bu kümeye **ortonormal küme** denir.

Teorem 2.1: Gram-Schmidt Ortogonalleştirme

V sonlu boyutlu bir iç çarpım uzayı ve $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_n\}$ V'nin herhangi bir bazı olsun. Bu bazdan yola çıkarak V için bir $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ **ortonormal bazı** elde edilebilir. Süreç şöyledir:

1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$
2. $\mathbf{v}_k = \mathbf{u}_k - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\langle \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_i \rangle}{\|\mathbf{v}_i\|^2} \mathbf{v}_i \quad (k = 2, \ldots, n)$
3. $\mathbf{e}_k = \frac{\mathbf{v}_k}{\|\mathbf{v}_k\|} \quad (k = 1, \ldots, n)$

3 Ortogonal Tümleyen ve İzdüşüm

$S \subseteq V$ bir alt küme olsun. S'in **ortogonal tümleyeni** $S^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \forall \mathbf{s} \in S, \langle \mathbf{v}, \mathbf{s} \rangle = 0\}$ şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1: Ortogonal Ayrışım

W, V'nin sonlu boyutlu bir alt uzayı ise:

$$V = W \oplus W^\perp$$

Bu durumda her $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$ ($\mathbf{w} \in W, \mathbf{w}' \in W^\perp$) şeklinde tek türlü yazılabilir. $\mathbf{w}$ vektörüne $\mathbf{v}$'nin W üzerindeki **ortogonal izdüşümü** denir.

4 Riesz Temsil Teoremi ve Adjoint Operatör

İç çarpım uzaylarında lineer fonksiyoneller (dualler) ile vektörler arasında birebir bir eşleme vardır.

Teorem 4.1: Riesz Temsil Teoremi

$\phi \in V^*$ (yani $\phi : V \to \mathbb{F}$ lineer) olsun. O zaman öyle bir tek $\mathbf{y} \in V$ vardır ki, her $\mathbf{x} \in V$ için:

$$\phi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle$$

Bu teorem, bir operatörün "devriğini" (transpose/conjugate transpose) tanımlamamıza olanak tanır.

Tanım 4.2: Adjoint (Eşlenik) Operatör

$T \in \mathcal{L}(V)$ olsun. Her $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ için

$$\langle T\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, T^*\mathbf{v} \rangle$$

eşitliğini sağlayan tek $T^* \in \mathcal{L}(V)$ operatörüne T'nin **adjoint** operatörü denir. Matris temsilinde, ortonormal bir baza göre $[T^*] = [T]^\dagger$ (eşlenik transpoze) olur.

BÖLÜM 2

NORMAL OPERATÖRLERİN YAPI TEORİSİ

Bu bölüm, iç çarpım uzaylarındaki operatörlerin en önemli sınıfı olan **Normal Operatörleri** ve bunların özel halleri olan **Hermityen (Self-Adjoint)** ve **Üniter** operatörleri inceler. Bölümün zirvesi, bu operatörlerin ortonormal bir bazda köşegenleştirilebileceğini söyleyen **Spektral Teorem**'dir.

1 Normal Operatörler

Tanım 1.1: Normal Operatör

Bir $T \in \mathcal{L}(V)$ operatörü, adjointi ile değişmeli ise, yani

$$TT^* = T^*T$$

ise T'ye **normal operatör** denir.

Normal operatörler, uzunluk koruma özellikleriyle bilinir.

Teorem 1.2: Normal Operatörlerin Özellikleri

T normal bir operatör olsun.

1. Her $\mathbf{v} \in V$ için $\|T\mathbf{v}\| = \|T^*\mathbf{v}\|$.
2. $T\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \iff T^*\mathbf{v} = \overline{\lambda}\mathbf{v}$. (Özvektörler aynıdır, özdeğerler eşleniktir).
3. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özvektörler **ortogonaldir**. (Standart köşegenleştirmede sadece lineer bağımsızlık varken, normal operatörlerde diklik vardır).

Kanıt.

(1)'in kanıtı: $\|T\mathbf{v}\|^2 = \langle T\mathbf{v}, T\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, T^*T\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{v}, TT^*\mathbf{v}\rangle = \langle T^*\mathbf{v}, T^*\mathbf{v}\rangle = \|T^*\mathbf{v}\|^2$. (3)'ün kanıtı: $T\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$ ve $T\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ ($\lambda \neq \mu$) olsun. $\lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \lambda\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle T\mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, T^*\mathbf{v}\rangle = \langle \mathbf{u}, \overline{\mu}\mathbf{v}\rangle = \mu\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$. $(\lambda - \mu)\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. $\lambda \neq \mu$ olduğundan $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle = 0$. ■

2 Özel Operatör Sınıfları

Normal operatörlerin iki önemli alt sınıfı vardır:

1. **Self-Adjoint (Hermityen) Operatörler:** $T = T^*$.
    - Tüm özdeğerleri **reeldir**.
    - Fizikte (Kuantum Mekaniği) gözlemlenebilir büyüklükleri temsil ederler.
2. **Üniter (veya Ortogonal) Operatörler:** $TT^* = T^*T = I$ (Yani $T^* = T^{-1}$).
    - Tüm özdeğerlerinin mutlak değeri 1'dir ($|\lambda| = 1$).
    - Uzunlukları ve açıları korurlar (İzometridirler).

3 Spektral Teorem

Bu teorem, lineer cebirin en temel sonuçlarından biridir. Karmaşık ve Reel durumlar için ayrı ayrı ifade edilir.

Teorem 3.1: Kompleks Spektral Teorem

V sonlu boyutlu bir **karmaşık** iç çarpım uzayı ve $T \in \mathcal{L}(V)$ olsun. V'nin T'nin özvektörlerinden oluşan bir **ortonormal bazının** var olması için gerek ve yeter şart, T'nin **normal** olmasıdır.

Bu, T'nin bir U üniter matrisi ile köşegenleştirilebileceği anlamına gelir: $D = U^* A U$.

Teorem 3.2: Reel Spektral Teorem

V sonlu boyutlu bir **reel** iç çarpım uzayı ve $T \in \mathcal{L}(V)$ olsun. V'nin T'nin özvektörlerinden oluşan bir **ortonormal bazının** var olması için gerek ve yeter şart, T'nin **self-adjoint** (simetrik) olmasıdır.

Not.

> Reel durumda "normal" olmak yetmez, çünkü örneğin 90° döndürme matrisi normaldir ama reel özdeğerleri olmadığı için reel uzayda köşegenleşemez. Reel simetrik matrislerin özdeğerlerinin reel olması bu teoremi mümkün kılar.

Örnek: Spektral Ayrışım

$A = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix}$ olsun. $A^* = \begin{bmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{bmatrix} = A$. Yani A Hermityen'dir. Özdeğerler: $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)^2 - 1 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3$. Özvektörler: $\lambda_1 = 1$ için $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, i)^T$. $\lambda_2 = 3$ için $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -i)^T$. $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ortonormal bir bazdır.